目　录

第一篇　基础实验

第二篇　研究实验

第一篇　基础实验

实验一　一元函数及其图形

本实验的目的是通过图形来认识函数，并运用函数的图形来观察和分析函数的有关特性，建立数形结合的思想。

1.1　函数及其图形

Mathematica 画区间$[a,b]$上函数$y=f(x)$的图形的命令为

Plot[f,{x,a,b}]

画参数方程$x=f(t),y=g(t),t\in[a,b]$所表示曲线的图形的命令为

ParametricPlot[{f,g},{t,a,b}]

实验 1　给定函数

$$f(x)=\frac{5+x^2+x^3+x^4}{5+5x+5x^2}$$

(a) 画出$f(x)$在区间$[-4,4]$上的图形；

(b) 画出区间$[-4,4]$上$f(x)$与$(\sin)f(x)$的图形。

解：（a）Mathematica 命令为

```
f[x_] = (5 + x^2 + x^3 + x^4)/(5 + 5 x + 5x^2);
g1 = Plot[f[x], {x, -4, 4}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]];
```

图形如图 1-1。

(b) Mathematica 命令为

```
g2 = Plot[Sin[x] f[x], {x, -4, 4}, PlotStyle -> RGBColor[0, 1, 0]];Show[g1, g2];
```

图形如图 1-2。

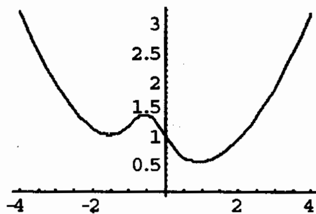


图 1-1

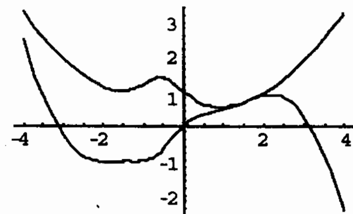


图 1-2

练习 1 观察图 1-2，并解释为什么两个图形在此区域内有一个交点。

练习 2 画出基本初等函数的图形，并观察它们的特点。

实验 2 观察函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的图形。

解：在区间[−1,1] 画出函数的图形如图 1-3。命令为 **Plot[Sin[1/x],{x,-1,1}];**

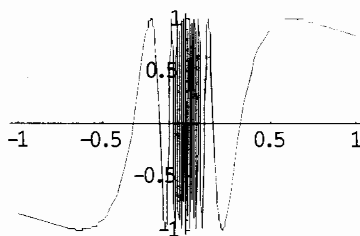


图 1-3

从图 1-3 中可以看到函数 $y=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 附近来回振荡。请解释其原因。

练习 3 分别作出以下函数在指定区间的图形，并观察函数的复合情况。

(a) 在区间 $[-5,5]$ 上，$f(x)=\sqrt{1+x^2}$，Mathematica 命令为

Plot[Sqrt[1+x^2],{x,-5,5},PlotStyle->{Dashing[{0.02,0.01}]}];

(b) $f(x)=\sin\cos\sin x, x\in[-\pi,\pi]$，Mathematica 命令为

Plot[Sin[Cos[Sin[x]]], {x, -Pi, Pi}];

(c) $f(x)=\dfrac{\tan\sin x-\sin\tan x}{x^2}, x\in[-5,5]$，Mathematica 命令为

Plot[(Tan[Sin[x]] - Sin[Tan[x]])/x^2, {x, -5, 5}];

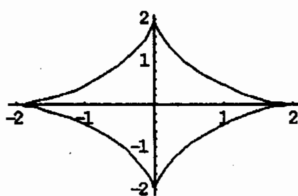
(d) $f_1(x)=\mathrm{e}^x, f_2(x)=\arctan x, f_3(x)=\mathrm{e}^{\arctan x}, x\in[-6,6]$，Mathematica 命令为

Plot[{Exp[x], ArcTan[x], Exp[ArcTan[x]]}, {x, -6, 6}, PlotPoints -> 100];

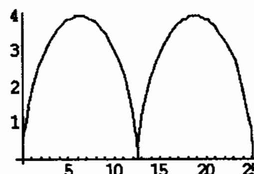
实验 3 （参数方程的图形）绘出以下参数方程的图形。

$$\begin{cases}x(t)=2\cos^3 t\\ y(t)=2\sin^3 t\end{cases}\qquad \begin{cases}x(t)=2(t-\sin t)\\ y(t)=2(1-\cos t)\end{cases}$$

解：分别输入以下 Mathematica 语句，图形如图 1-4。



(a)



(b)

图 1-4

```
x1[t_] = 2 Cos[t]^3; y1[t_] = 2Sin[t]^3;   ParametricPlot[{x1[t], y1[t]}, {t, 0, 2 Pi}];
x2[t_] = 2(t - Sin[t]); y2[t_] = 2(1 - Cos[t]);   ParametricPlot[{x2[t], y2[t]}, {t, 0, 4 Pi}];
```

练习 4 (极坐标图形)分别画出心形线、三叶玫瑰线的图形。

画心形线的 Mathematica 命令为

```
r[t_] := (3 Cos[t]^2 - 1)/2;ParametricPlot[{r[t] Cos[t], r[t] Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi}];
```

画三叶玫瑰线的 Mathematica 命令为

```
r[t_] := 2 Cos[t];ParametricPlot[{r[t] Cos[t], r[t] Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi}];
```

我们可以利用 Mathematica 中的条件语句来画分段函数的图形。

实验 4 画出分段函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$ 的图形。

解：Mathematica 语句如下，得到的图形如图 1-5。

```
f[x_] := x^2 Sin[1/x] /; x != 0; f[x_] := 0 /; x = 0;Plot[f[x], {x, -1, 1}];
```

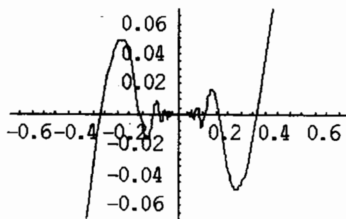


图 1-5

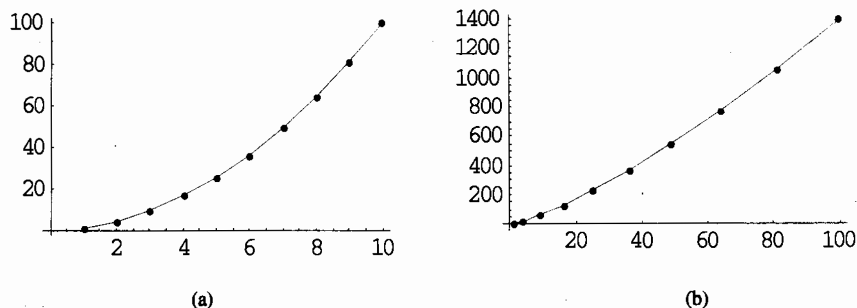
在很多实际问题中，我们并不知道函数的实际表达式，而仅仅能测量到函数的某些型值点，这些型值点的值可以列成数据表。这称为函数的列表表示。

实验 5 分别画出坐标为(i,i^2)、$(i^2,4i^2+i^3),(i=1,2,\cdots,10)$的散点图，并画出折线图。

解：分别输入以下 Mathematica 命令，得到结果如图 1-6。

```
t1 = Table[i^2, {i, 10}];g1 = ListPlot[t1, PlotStyle -> PointSize[0.02]];
g2 = ListPlot[t1, PlotJoined -> True];Show[g1, g2];

t2 = Table[{i^2, 4 i^2 + i^3}, {i, 10}];   g1 = ListPlot[t2, PlotStyle -> PointSize[0.02]];
g2 = ListPlot[t2, PlotJoined -> True];   Show[g1, g2];
```



(a) (b)

图 1-6

练习 5 分别输入以下 Mathematica 语句，观察所得到的图形，并体会 Mathematica 语句中参数项 PlotRange 的作用。

```
Plot[x^4 + Sin[10 x], {x, 0, 5}];
Plot[x^4 + Sin[10 x], {x, 0, 5}, PlotRange -> All];
Plot[x^4 + Sin[10 x], {x, 0, 5}, PlotRange -> {-1, 1}];
Plot[x^4 + Sin[10 x], {x, 0, 5}, PlotRange -> {{0, 1}, {-1, 2}}];
```

练习 6 利用函数的图形研究函数的性质。函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，当 $x=0$ 时没有定义，然而函数的图形在 $x=0$ 点有着很好的性质。

(a) 在区间 $[-2,2]$ 上画出函数的图形，并另外给出一个不具有这个性质的函数。

(b) 当 h 很小时，$f(h)$接近于 1，在同一坐标系中，画出 $f(x)$和常数函数 $x=0.9$，并注意观察它们的图形。

(c) 选择更小的 h，重复(b)的操作。

练习 7 (a)在区间 $[-1.3,2.5]$ 上画出函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 的图形，并观察所得到图形，哪一部分是正确的？哪一部分是错误的？

(b) 尽可能找出不正确的部分，并用以下语句在同一区间画出 $f(x)$的图形。

```
Plot[1/(1 - x), {x, -1.3, 2.5}, PlotRange -> {{0.95, 1.05}, All}];
```

(c) 在区间[0,24]上，画出函数 $f(x)=x+\sin 2\pi x$ 的图形，并解释所看到的结果。

1.2 函数性质的研究

给定二维曲线图形，如何判断一个图形是某一个函数的图形已在高等数学中介绍。若其是某一个函数的图形（一个 x，对应图形上的一点），我们如何从图形观察函数的单调性、奇偶性、周期性等？

实验 6 研究函数 $f(x)=x^5+3e^x+\log_3(3-x)$ 在区间[-2,2]上图形的特性。

解：输入以下 Mathematica 语句：**Plot[x^5 + 3 E^x + Log[3, 3 - x], {x, -2, 2}];**

可得图形如图 1-7，由图形容易看出，从左到右，图形渐渐上升。因而是增函数。

练习 8 选用不同的区间，如 $[-3,3],[-10,10]$ 画出函数 $f(x)=x^5-x$ 的图形，并判断其单调性，试解释两种不同的结果。

实验 7 判断函数 $f(x)=\sin 2\pi x+\cos 2\pi x$ 是否为周期函数。

解：任选一个较大的范围，如取[-4, 4]，在此区间上画出函数 $f(x)$的图形如图 1-8。

```
Plot[Sin[2 Pi x] + Cos[2 Pi x], {x, -4, 4}];
```

可以看出函数的图形以某一宽度为单位重复出现。

若一个函数满足：一个 y 对应着一个 x，则其反函数一定存在，且在表达式中将 y 换成常量求解 x，即将所得表达式中 y 换成 x，x 换成 y 即得到反函数的表达式。

实验 8 判断函数 $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ 的反函数的存在性。若存在，求反函数的表达式，并画出其图形。

解：解方程 $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ 求 x。输入 **Solve[y == x^3 + 3 x^2 + 3 x + 1, x]**。

因此，所求反函数为 $y = -1 + \sqrt[3]{x}$。输入 **Plot[-1 + x^(1/3), {x, -3, 3}];** 画出了反函数在区间[-3, 3]内的图形如图 1-9。

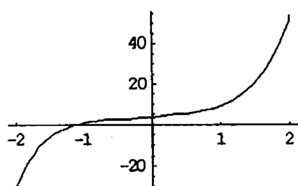


图 1-7

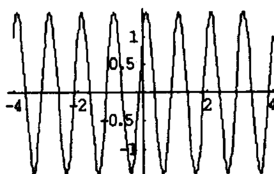


图 1-8

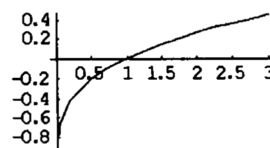


图 1-9

练习 9 给定函数 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$。

(a) 请观察 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的图形，给出它们之间的关系。

(b) $f(x)$ 与 $f(x+3)$ 的图形之间有什么关系？

(c) $f(x)$ 与 $f(x+3)-3$ 的图形之间有什么关系？

(d) 请观察 $f(x)$ 与 $f(|x|), |f(x)|, |f(|x|)|$ 之间的关系？

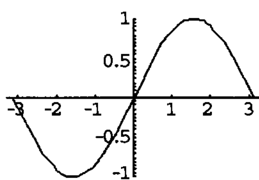
我们还可以借助于 Mathematica 中的动画功能来理解不同图形之间的关系。

实验 9 制作函数 $\sin cx$ 的图形动画，观察参数 c 对函数图形的影响。

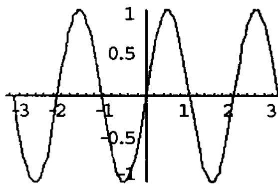
解：输入以下 Mathematica 命令。

```
Do[Plot[Sin[c x], {x, -Pi, Pi}, PlotRange -> {-1, 1}], {c, 1, 4, 1/3}];
```

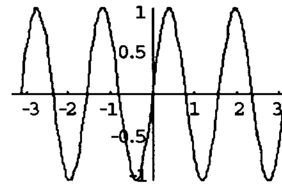
部分图形如图 1-10。



(a)



(b)



(c)

图 1-10

实验 10 作出函数 $f(x) = x + \sin cx$ 的图形动画，观察参数 c 对函数图形的影响。

解：输入以下 Mathematica 命令，即可得到一系列图形。

```
Do[Plot[x^2 + Sin[c x], {x, -3, 3}, PlotRange -> {-1, 5}], {c, 1, 5, 1/3}];
```

练习 10 观察幂函数 $y = x^p$，当 p 连续变化时函数图形的变化。

练习 11 观察函数 $y = \sin x^p$，当 p 连续变化时函数图形的变化。

1.3 关于函数图形的进一步研究

利用 Mathematica，我们可以画出一些难以想象的图形。

实验 11 画出以下参数方程的图形。

(1) $\begin{cases} x(t)=5\cos\left(-\dfrac{11}{5}t\right)+7\cos t \\ y(t)=5\sin\left(-\dfrac{11}{5}t\right)+7\sin t \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x(t)=\cos t\cos 5t \\ y(t)=\sin t\cos 3t \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x(t)=(1+\sin t-2\cos 4t)\cos t \\ y(t)=(1+\sin t-2\cos 4t)\sin t \end{cases}$

解：分别输入以下 Mathematica 语句，得到函数的图形如图 1-11、图 1-12、图 1-13。

```
ParametricPlot[{5 Cos[-11/5 t] + 7 Cos[t], 5 Sin[-11/5 t] + 7 Sin[t]}, {t, 0, 10 Pi},
        AspectRatio -> Automatic];
ParametricPlot[{ Cos[5 t]Cos[t], Sin[ t] Cos[3 t]}, {t, 0, Pi},AspectRatio -> Automatic];
ParametricPlot[(1 + Sin[t] - 2 Cos[4*t])*{Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2* Pi},
        AspectRatio -> Automatic, Axes -> None];
```

此外，我们利用 Mathematica 可以在某些整数值实现函数的可视化。

实验 12 画出前 25 个素数的散点图。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到图形如图 1-14。

```
Table[Prime[n], {n, 25}];
ListPlot[Table[Prime[n], {n, 25}], PlotStyle -> PointSize[0.015]];
```

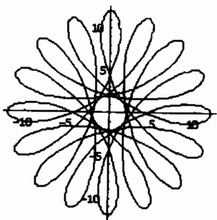


图 1-11

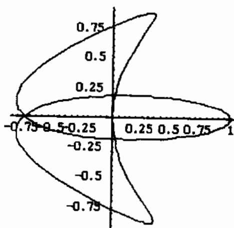


图 1-12

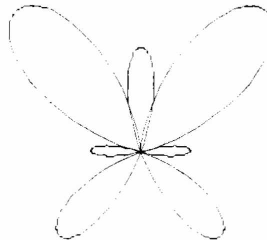


图 1-13

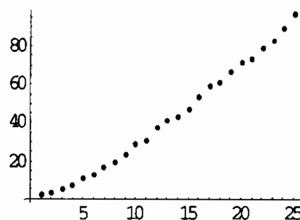


图 1-14

练习 12 （敏感多项式）一个 n 次多项式最多有 n 个根。例如，三次多项式 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 当 $x=1,2,3$ 时为 0。

(a) 画出这个三次多项式的图形，然后在区间[-1,7.5]上画出 7 次多项式 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$ 的图形。

(b) 利用命令 Expand[]将这个 7 次多项式展开，你将得到 x^6 的系数为-28，现将该系数变为-28.01，并在相同的区间上画出改变后的多项式的图形，试与前面所得到的图形作比较，观察有多少个零点（根）发生了变化？

练习 13 首先回忆一下 $\sin x$ 的性质，研究一个函数 $f(x)$ 乘以 $\sin x$ 后图形的变化趋势。

(1) 区间[0, 15]上作出函数 $y_1=x, y_2=-x, y_3=x\sin x$ 的图形。

(2) 在区间[0.15]上作出函数 $y_1=\ln x, y_2=-\ln x, y_3=\ln x\sin x$ 的图形。

(3) 任取一个函数 $f(x)$ 和一个区间，作出函数 $y_1 = f(x)$ 和 $y_2 = \sin f(x)$ 的图形。

(4) 试给出函数 $y_1 = f(x)$ 和 $y_2 = f(\sin x)$ 的图形之间的关系。

练习 14 (a) 任意选取一个 x_0，观察 $\sin(x_0), \sin(\sin(x_0)), \sin(\sin(\sin(x_0)))$ 等等，你能得到什么结论？

(b) 画出 $\sin(\sin x)$ 以及 $\sin x$ 的更多重复合函数的图形，你能得出什么结论？

实验二　极　　限

本实验的目的是加深对极限概念的理解，了解函数极限与数列极限间的联系，进一步理解无穷小的概念和收敛速度问题。

极限的概念是高等数学的起点，理解和掌握它对于学好高等数学十分重要。本实验将从直观上揭示极限的本质。

2.1　数列的极限

2.1.1　数列的极限

在高等数学中，数列$\{a_n\}$有极限是指：对于数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$和常数A，如果对任意正数ε，总存在自然数N，使得当$n>N$时，恒有不等式$|a_n - A| < \varepsilon$成立，则称常数A为数列$\{a_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$。

通俗的说法是，当 n 充分大时，a_n充分接近 A，则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$。

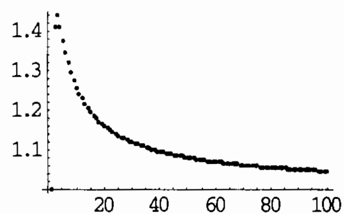


图 2-1

实验 1　观察数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的前 100 项变化趋势。

解：我们可以画出其散点图，借助于图形来观察它的变化趋势。

输入以下 Mathematica 语句，其图形如图 2-1 所示。

```
t = N[Table[n^(1/n), {n, 1, 100}]];ListPlot[t, PlotStyle -> PointSize[0.015]];
```

从图 2-1 中可看出，这个数列似乎收敛于 1。下面我们以数值的方式来说明这一变化趋势。输入以下语句，并观察其数值结果。

```
m = 2; xn = 0;
For[i = 1, i <= 1000, i += 50,If[Abs[xn - 1] > 10^-m, xn = N[n^(1/n), 20];
    Print[i, "        ", xn]]];
```

设该数列收敛于$A=1+u(u\geqslant 0)$，不妨取$u=10^{-2}$，下面考察$\sqrt[n]{n}$与A的接近程度。输入以下 Mathematica 语句。

```
u = 10^(-2); A = 1 + u; m = 5; n = 3; an = Sqrt[3];
While[Abs[A - an] >= 10^(-m), n++;an = N[n^(1/n)]];
Print["        n=", n, "        an=", an, "        |A-an|=", Abs[A - an]]
```

所得结果表明：当$n=651$，$a_n=1.01$时，a_n与$1+10^{-2}$的距离小于10^{-5}。

练习 1　判断数列$\{\sqrt[n]{n}\}$中有多少项落在$1+u(u=10^{-2})$的10^{-m}的邻域内。当n充分大时，$\{\sqrt[n]{n}\}$还在该邻域内吗？取m为其它数重复实验 1。

练习 2　取其它的u重复上面的实验 1。

练习 3 取 u=0 即 A=1，重复练习 1，你能得出什么结论？

实验 2 观察 Fibonacci 数列的变化趋势。

解：Fibonacci 数列具有递推关系 $F_0=1, F_1=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，令 $R_n=\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$，输入以下 Mathematica 语句。

```
fn1 = 1; fn2 = 1; rn1 = 1;
For[i = 3, i <= 14, i++,
    fn = fn2 + fn1;fn2 = fn1; fn1 = fn; rn = N[fn2/fn1, 20]; dn = rn - rn1; rn1 = rn;
    Print[i, "        ", fn1, "              ", rn, "                                    ", dn]];
```

其中第二列给出了 Fibonacci 数列的前 14 项，第 3 列给出了 R_n 的值，由第 4 列可以看出，$R_n-R_{n-1}\to 0$。我们也可以用散点图来观察 Fibonacci 数列的变化趋势如图 2-2，输入以下 Mathematica 语句。

```
Clear[f]; f[n_] := f[n - 1] + f[n - 2];f[0] = 1; f[1] = 1;
fab20 = Table[f[i], {i, 0, 20}];ListPlot[fab20, PlotStyle -> PointSize[0.02]];
lnfab20 = Log[fab20];ListPlot[lnfab20, PlotStyle -> PointSize[0.02]];
```

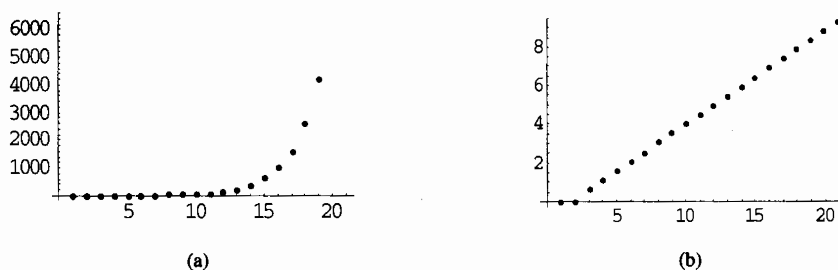


图 2-2 （b 图为取对数以后的图形）

为了更好地观察数列的变化趋势，我们可以利用 Mathematica 的动画功能来进一步观察数列随着 n 的增大的变化趋势。

实验 3 利用动画观察当 $n\to\infty$ 时数列 $a_n=\dfrac{1}{n^2}$ 的变化趋势。

解：逐渐增加点并画图，其 Mathematica 语句为：

```
Clear[tt];tt = {1, 1/2^2, 1/3^2}; Do[tt = Append[tt, N[1/i^2]];
  ListPlot[tt, PlotRange -> {0, 1}, PlotStyle -> PointSize[0.02]], {i, 4, 20}]
```

这里画了 16 幅图（列出部分图如图 2-3），从左至右图中点数逐渐增多，从图中可以看出所画出的点逐渐接近于 x 轴。

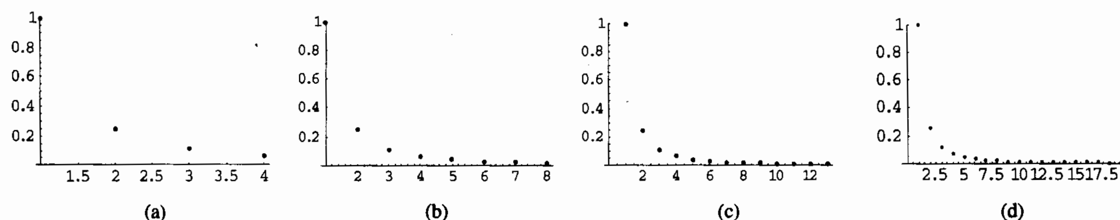


图 2-3

练习 4 改变终止值 20，重做实验 3。

实验 4 设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$由下式确定：

$$\begin{cases} x_1 = 1, y_1 = 2 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, n = 1, 2, \cdots \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \end{cases} \tag{2-1}$$

观察$\{x_n\}$与$\{y_n\}$的极限是否存在。

解：输入以下 Mathematica 语句进行观察，

```
Clear[f, g]; f[x_, y_] := Sqrt[x*y]; g[x_, y_] := (x + y)/2; xn = 1; yn = 2;
For[n = 2, n <= 100, n++,
    xN = xn; yN = yn; xn = N[f[xN, yN]]; yn = N[g[xN, yN]];];
Print["x100=     ", xn, "           y100=", yn]
```

运行该程序可判断出：$\{x_n\}$与$\{y_n\}$有极限，且这两极限值是相等的($x_{100} = y_{100} = 1.45679$)。

已知数列$\{x_n\}$,由$a_n = \dfrac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(n = 1, 2, \cdots)$确定的数列$\{a_n\}$称为数列$\{x_n\}$的算术平均。

实验 5 设$\{x_n\}$由（2-1）式给出，观察数列$\{a_n\}$有无极限。

解：输入以下 Mathematica 语句进行观察，

```
Clear[f, g];f[x_, y_] := Sqrt[x*y]; g[x_, y_] := (x + y)/2;
s = 1; xn = 1; yn = 2; n = 1; ts = {};
While[Abs[s/n - yn] > 10^-3, n++;
  xN = xn; yN = yn;xn = N[f[xN, yN]]; yn = N[g[xN, yN]];
  s = s + xn;ts = Append[ts, s/n];     Print[n, "          ", xn, "     ", s/n]]
```

部分结果见表 2-1。

表 2-1 数列及其算术平均数列

n	x_n	a_n	n	x_n	a_n
2	1.41421	1.20711	200	1.45679	1.45429
5	1.45679	1.35685	300	1.45679	1.45513
10	1.45679	1.40682	400	1.45679	1.45554
100	1.45679	1.45179	500	1.45679	1.45579

由以上计算结果可以得出结论：该算术平均数列极限存在，且其极限与$\{x_n\}$的极限相等，即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \tag{2-2}$$

画出这两个数列的散点图如图 2-4，我们可以更清楚地看到这一结论。

虽然上面的两个数列收敛到同一个值，但其收敛速度却有很大的区别。由表 2-1 可知，当 $n=300$ 时，$a_n=1.45579$，而在 $n=4$ 时，已有 $x_n=1.45679\approx$ 极限值。这说明 $\{a_n\}$ 的收敛速度要远远小于 $\{x_n\}$ 的收敛速度。

事实上，只要 $\{a_n\}$ 的极限存在，(2-2)式总是成立的，该结论为 Stolz 定理的一个特例。

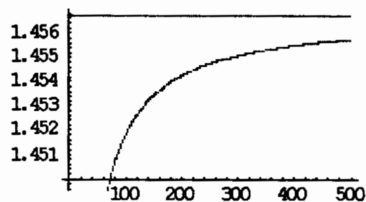


图 2-4

Stolz 定理：对数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$，若 $y_1<y_2<\cdots<y_n<\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，又极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l$（可为 $\pm\infty$），则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_0}{y_0}=l$。

练习 5 若数列 $\{x_n\}$ 由（2-1）式给出，观察数列 $\left\{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\right\}$ 有无极限，若有极限与 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 相等吗？证明你的结论。

练习 6 若数列 $\{x_n\}$ 由（2-1）式给出，观察数列 $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ 与 $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$ 有无极限，若有极限，这两个极限间存在什么关系？证明你的结论。

练习 7 观察数列 $\left\{\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}\right\}$ 有无极限，其中数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 由（2-1）式给出。若该数列有极限，极限值为多少？证明你的结论。

练习 8 设 $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}},a_1=\sqrt{2}$，观察数列 a_n 的极限。

(1) 在平面上画出点 $(n,a_n)(n=1,2,\cdots,1000)$ 的散点图和折线图。

(2) 根据上述的图形，猜测 a_n 的极限是多少。证明你的结论。

2.1.2 数列极限与生长模型

在生物学中，有一个刻画生物群体中的个体总量增长情况的著名方程——Logistic 方程，

$$P_{n+1}=kP_n(1-P_n) \tag{2-3}$$

其中 P_n 为某一生物群体的第 n 代的个体总量与该群体所能达到的最大个体总量之比，$0\leqslant P_n\leqslant 1(n=0,1,2,\cdots)$，$k$ 为比例系数。

给定初值 P_0 和比例系数 k 的值后，由方程（2-3）就能生成一个数列，

$$P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n,\cdots$$

生物学家为了预测群体总量的变化情况，就要研究这个数列，他们感兴趣的问题是：这个数列存在极限吗？数列中的项会出现周期性的变化情况吗？数列会不会呈现无法预测的紊乱情况？

下面我们来考察数列 P_n 的不同变化情况，从而对数列的不同变化趋势获得较为生动的感性

认识，加深对数列极限的理解。

实验 6 令 $P_0 = 0.5, k$ 取 1 和 3 之间的两个不同的值，观察数列的变化趋势。

解：不妨设 k=1.5 和 k=2.5，所得结果如图 2-5。

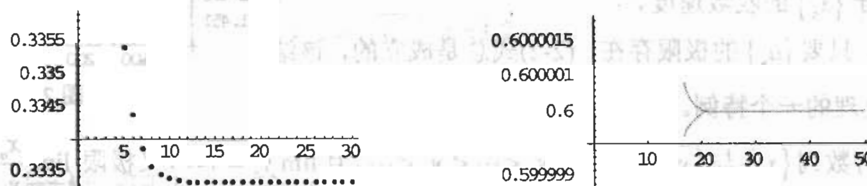


图 2-5 （左图 $k = 1.5$，右图 $k = 2.5$）

这两个数列看起来都是收敛的，这表明：种群中的个体总量将趋于一个稳定值。

练习 9 在 (0,1) 内任意选一个 P_0，k 值不变，观察数列的变化趋势。

练习 10 根据观察所得的结果，数列极限是否依赖于 P_0 所取的值？又是否依赖于 k 所取的值？并尝试从理论上解释，当 $1 < k < 3$ 时，由（2-3）式能生成收敛数列。

实验 7 令 $P_0 = 0.5, k$ 取 3 和 3.4 之间的值，观察数列的变化趋势。

解：所得结果如图 2-6。

为了更清楚地显示数列的变化情况，我们将上面的点用折线连接起来，结果如图 2-7。可见这时数列不收敛，而出现周期性的波动，数列的项交替取两个不同的值。

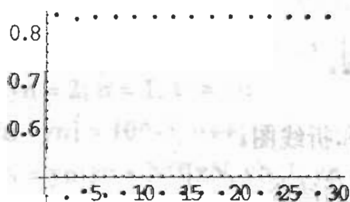


图 2-6

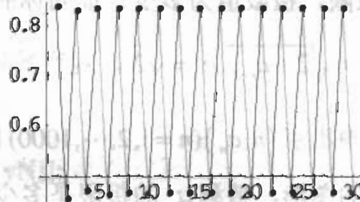


图 2-7

实验 8 再令 k 取 3.4 和 3.5 之间的值，观察数列的变化趋势。

解：所得结果如图 2-8。

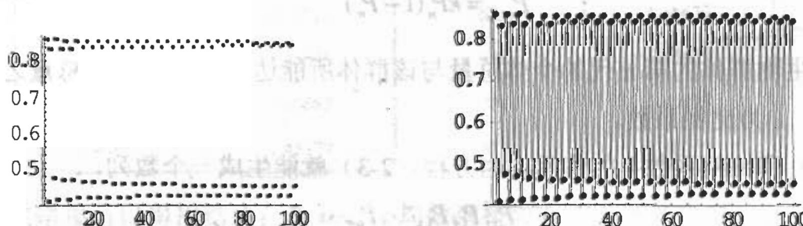


图 2-8

可见，这时数列仍出现周期性波动的情况，但所取到不同值个数明显增加。

实验 9 令 k 取 3.6 和 4 之间的值，观察数列的变化趋势。

解：所得结果如图 2-9。

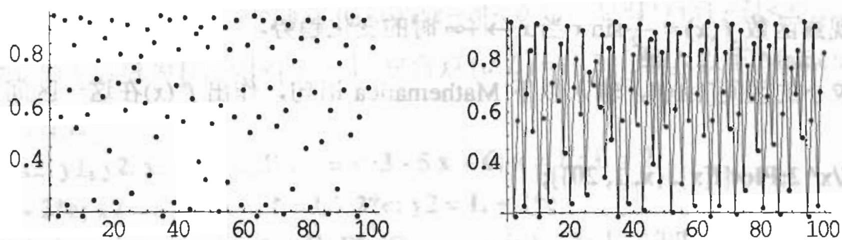


图 2-9

可见这时数列的变化趋势变得很紊乱。这里特别指出一种值得注意的现象：若给 P_0 值一个微小的变动，例如增减 0.001，那么数列后面的项将会出现很大的变动，这种现象在数学上被称为“混沌”，在后面的实验（实验三十三）中，我们将要做进一步的讨论。在某些特定条件下，昆虫种群的成长情况就会出现这种难以预测的混沌现象。

实验 10　当 $k=3.8$ 时，给定 P_0 以 0.001 的增加量，即 P_0=0.501，观察数列的变化趋势。

解：所得结果如图 2-10。

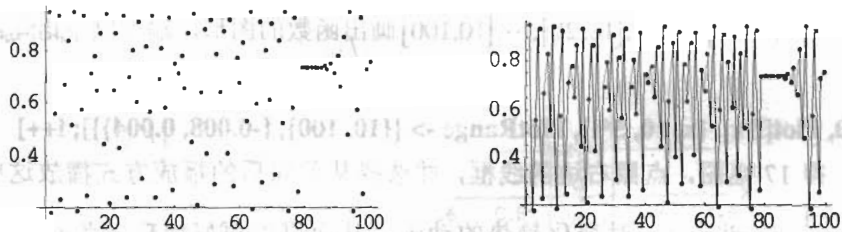


图 2-10

将图 2-9 与图 2-10 比较，可见两者有明显差别，特别是在 $n\in(80,90)$ 之间，两者之间的差别非常大。我们指出，出现这种差别的部分原因是由于计算过程中舍入误差的不断积累。因此在不同的精度下进行计算，所得出的图形会有所不同。通过观察图 2-10，我们发现随着 k 值的增加，数列中的项所取到的值变得更加分散，且有更多的项取得接近于 0 或 1 的极端值，从而出现了混沌现象。

练习 11　取 P_0=0.499，观察数列的变化趋势。

练习 12　在区间(1,3)和(3,4)内取 k 的其它值，在(0,1)内取 P_0 其它值，重复以上的实验。

2.2　函数的极限

在 2.1 中，我们研究了数列的变化趋势，从而更直观地理解了数列的极限的概念。对于函数的极限，我们也可以利用类似的方程来加以理解。

实验 11　在区间[-4,4]上作出函数 $f(x)=\dfrac{x^3-9x}{x^3-x}$ 的图形，并研究 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$。

解：输入以下 Mathematica 语句，$f(x)$的图形如图 2-11。

```
Clear[f];f[x_] = (x^3 - 9x)/(x^3 - x);Plot[f[x], {x, -4, 4}];
```

从图 2-11 中，我们可以猜测 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=9$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在。

实验 12 观察函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin x$ 当 $x\to+\infty$ 时的变化趋势。

解：取一个较小的区间[1,10]，输入以下 Mathematica 语句，作出 $f(x)$在这一区间上的图形如图 2-12。

```
f[x_] = Sin[x]/x^2;Plot[f[x], {x, 1, 20}];
```

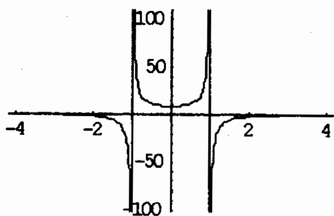


图 2-11

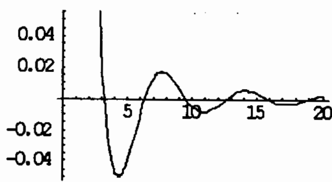


图 2-12

从图 2-12 中可以看出图形逐渐趋于 0。事实上，逐次取更大的区间，可以更有力地说明当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$。

动画：分别取区间 $[10,15],[10,20],\cdots,[10,100]$ 画出函数的图形，输入以下语句：

```
i = 3;
While[i <= 20, Plot[f[x], {x, 10, 5*i}, PlotRange -> {{10, 100}, {-0.008, 0.004}}]; i++]
```

运行后，得 17 幅图，点黑右边的线框，并选择从前向后的播放方式播放这些图形，可得函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin x$当$x\to\infty$ 时变化趋势的动画，从而可以更好地理解此时函数的变化趋势。

练习 13 作出函数 $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ $(1\leqslant x\leqslant 100)$的图形，观察当 $x\to+\infty$ 时 y 的变化趋势，并求出极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$。

练习 14 作出函数 $f(x)=\frac{\tan 4x}{x}$ 的图形，估计 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$。

练习 15 作出函数 $g(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ 的图形，在区域 $[-1,1]\times[-1,1]$ 内观察当 $x\to 0$ 时，$g(x)$的变化趋势。

练习 16 作出函数 $y=x\cos x$ 的图形，观察 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界。当 $x\to+\infty$ 时这个函数是否为无穷大？并证明你的结论。

练习 17 分别作出函数 $f(x)=x^{0.1}$ 和 $g(x)=\ln x$ 的图形，观察 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的关系。进一步作出函数 $h(x)=g(x)/f(x)$ 的图形，观察 $x\to+\infty$ 时，$h(x)$ 的变化趋势，并确定正数 X，当 $x>X$ 时，$h(x)<0.1$。

下面我们将以直观的和数值的两种方式相结合来进一步理解函数极限的概念。

实验 13 设 $f(x)=x^3-5x+6, a=1$，我们已知 $L=\lim\limits_{x\to a}f(x)=2$，试对于给出的各个

$\varepsilon = 0.2, 0.1,\ 0.05, 0.01$，求出相应的$\delta$，使得当$|x-a|<\delta$时，总有$|f(x)-L|<\varepsilon$。

解：选取函数的观察区域为$[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]$，包含点$(a,L)=(1,2)$，输入以下 Mathematica 语句，得到结果如图 2-13。

```
Clear[f, e, x1, x2, y1, y2, x, y, L, a];f[x_] = x^3 - 5 x + 6; a = 1.; L = 2;
e = 0.2; x1 = a - 2*e; x2 = a + 2*e; y1 = L - 2*e; y2 = L + 2*e;
g = Plot[{f[x], L, L - e, L + e}, {x, x1, x2}, PlotRange -> {y1, y2},
      AxesLabel -> {"x", "y"}];
rx12 = FindRoot[f[x] == L - e, {x, {a, x2}}]; xx12 = x /. rx12;
rx21 = FindRoot[f[x] == L + e, {x, {x1, a}}]; xx21 = x /. rx21;
d12 = xx12 - a; d21 = a - xx21; dd = If[d12 < d21, d12, d21];
xx1 = a - dd; xx2 = a + dd;
gh1 = ParametricPlot[{x = xx1, y = t}, {t, y1, y2}, DisplayFunction -> Identity];
gh2 = ParametricPlot[{x = xx2, y = t}, {t, y1, y2}, DisplayFunction -> Identity];
Show[g, gh1, gh2, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
xx = {e, dd, xx1, xx2}
```

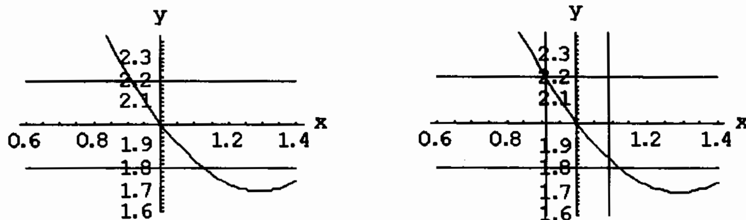


图 2-13

练习 18 换一个函数$f(x)$或改变ε值，重复实验 13。

2.3 函数极限与数列极限的关系

数列极限为函数极限的特例。即：当函数的自变量按如下方式取值时，均可对应为数列的极限（设函数极限的趋向过程为$x\to\infty$）。

(1) 自变量简单取值为n，则$f(n)$为一数列；

(2) 自变量取值为$g(n)$，且$g(n)$满足$\lim\limits_{n\to\infty} g(n)=\infty$（若趋向过程为$x\to x_0$时，应满足$\lim\limits_{n\to\infty} g(n)=x_0$），则$f(g(n))$为一数列。

总之，当自变量取趋向过程中的一个子列时，可以得到函数值的一个相应子列。

实验 14 考察函数极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$与数列$n\sin\dfrac{1}{n},\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}},\dfrac{n^2}{n+1}\sin\dfrac{n+1}{n^2}$极限间的关系。

解：输入以下 Mathematica 语句，我们将函数图形与其子列的图形加以对照如图 2-14。

```
Clear[f, g];f[x_] := Sin[x]/x;t1 = Table[{1/n, n*Sin[1/n]}, {n, -30, 30}];
t2 = Table[{1/n, Sqrt[n]*Sin[1/Sqrt[n]]}, {n, 1, 30}];
t3 = Table[{1/n, n^2/(n + 1)*Sin[(n + 1)/n^2]}, {n, -30, 30}];
```

```
gt1 = ListPlot[t1, PlotStyle -> PointSize[0.02], DisplayFunction -> Identity];
gt2 = ListPlot[t2, PlotStyle -> PointSize[0.02], DisplayFunction -> Identity];
gt3 = ListPlot[t2, PlotStyle -> PointSize[0.02], DisplayFunction -> Identity];
g = Plot[f[x], {x, -1, 1}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], DisplayFunction -> Identity];
Show[g, gt1, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
Show[g, gt2, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
Show[g, gt3, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

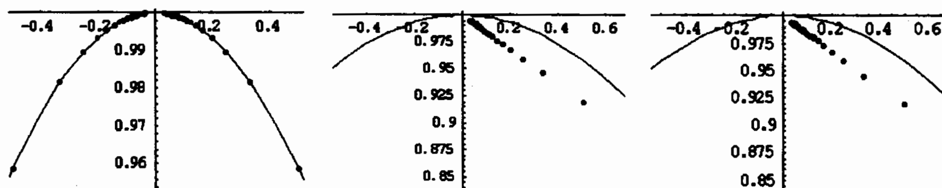


图 2-14 （从左至右依次为子列 $n\sin\frac{1}{n}$，$\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$，$\frac{n^2}{n+1}\sin\frac{n+1}{n^2}$ 与 $\frac{\sin x}{x}$ 的比较）

可以看出子列图形只是函数图形上的一部分组成。

对于以下几个数列：

(1) $x_n=\frac{2+(-1)^n}{n}$ (2) $x_n=\frac{5n^2+2}{3n^2+n+1}$ (3) $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (4) $x_n=\frac{n!}{2^n}$

容易知道，当 $n\to\infty$ 时，前 3 个数列的极限存在，且分别为 0, $\frac{5}{3}$, e，第 4 个数列的极限不存在。

下面我们考察另外一种与它们对应的数列，其形式为：$|x_{n+p}-x_n|$，其中 p 为任意确定的正整数。

实验 15 令 p=1，分别观察数列（1），（2），（3），（4）所对应的数列 $|x_{n+p}-x_n|$ 的变化趋势。

解：输入以下 Mathematica 语句，所得的结果如图 2-15。

```
Clear[p, t1, t2, t3, t4];p = 1;
t1 = Table[Abs[(2 + (-1)^(n + p))/(n + p) - (2 + (-1)^n)/n], {n, 1, 100}];
t2 = Table[ Abs[(5*(n + p)^2 + 2)/(3*(n + p)^2 + n + p + 1) - (5*n^2 + 2)/(3*n^2 +
        n + 1)], {n, 1, 100}];
t3 = Table[Abs[(1 + 1/(n + p))^(n + p) - (1 + 1/n)^n], {n, 1, 100}];
t4 = Table[Abs[(n + p)!/2^(n + p) - n!/2^n], {n, 1, 100}];
ListPlot[t1, PlotStyle -> PointSize[0.015]];ListPlot[t2, PlotStyle -> PointSize[0.015]];
ListPlot[t3, PlotStyle -> PointSize[0.015]];ListPlot[t4, PlotStyle -> PointSize[0.015]];
```

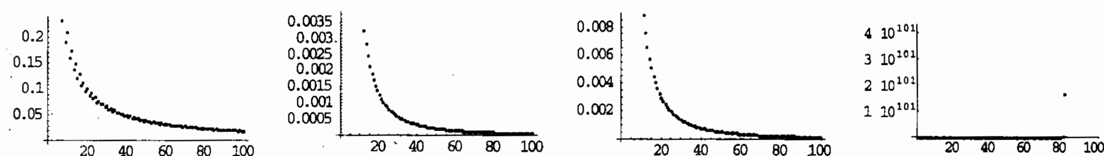


图 2-15 （数列（1），（2），（3），（4）的变化趋势）

从图 2-15 可以看出，前三个数列对应的数列$|x_{n+p}-x_n|$的极限为 0，而第 4 个数列对应的$|x_{n+p}-x_n|$值越来越大。

练习 19 分别令 $p=3,7,10,20,50,100$，重复实验 15，你能得到什么结论？请证明之。

2.4 收敛速度与无穷小的阶

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，称数列 x_n 接近其极限 a 的快慢程度为 x_n 的收敛速度。在进行科学计算时，收敛速度对计算效率有着十分重要的意义。

实验 16 观察以下数列的变化趋势，并给出满足$|x_n-a|<10^{-3}$时最小的 n（其中 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$）。

(1) $a_n=\dfrac{1}{n}$ (2) $b_n=\dfrac{1}{n^3}$ (3) $c_n=\dfrac{1}{10^n}$ (4) $c_n=\dfrac{1}{\ln}n$ (5) $e_n=\dfrac{1}{10^{3n}}$

解：输入以下 Mathematica 语句，分别作出数列的散点图如图 2-16。

```
Clear[ta, tb, tc, td, te];ta = Table[1/n, {n, 1, 1000}];tb = Table[1/n^3, {n, 1, 100}];
tc = Table[1/10^n, {n, 1, 100}];td = Table[1/Log[n], {n, 2, 100}];
te = Table[1/10^(3^n), {n, 1, 5}];ListPlot[ta, PlotStyle -> PointSize[0.015]];
ListPlot[tb, PlotStyle -> PointSize[0.015]];ListPlot[tc, PlotStyle -> PointSize[0.015]];
ListPlot[td, PlotStyle -> PointSize[0.015]]; ListPlot[te, PlotStyle -> PointSize[0.015]];
```

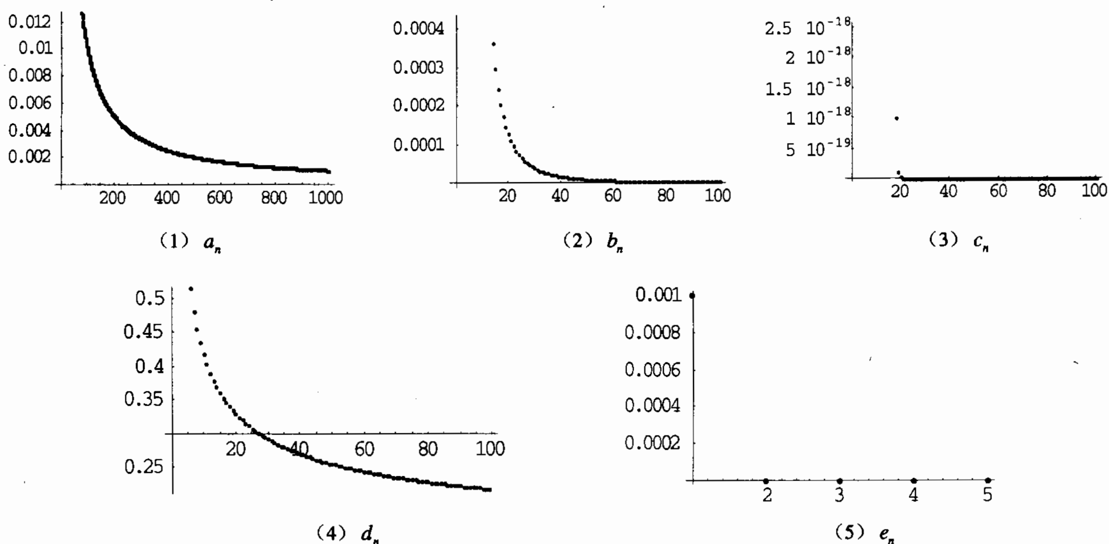


图 2-16

对于 $a_n,n=1001;b_n,n=1;c_n,n=4;d_n,n=10^3+1;e_n,n=2$ 时，它们满足$|x_n-a|<10^{-3}$。

由以上结果，我们看到，为了达到相同的精度要求，计算速度的差别非常大，以上数列的收敛速度有以下关系：$d_n<a_n<b_n<c_n<e_n$。

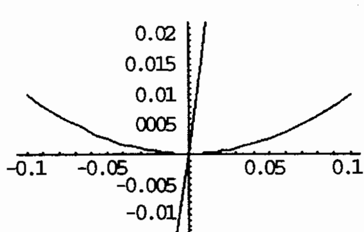
练习 20 对于如何衡量收敛速度，提出你的结论。

实验 17 观察以下函数当 $x\to0$ 时的变化趋势，并应用你所学的知识给予合理的解释。

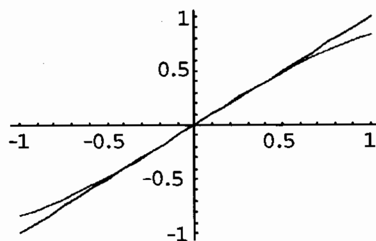
(1) x^2与$2x$　　(2) $\sin x$与x　　(3) $1-\cos 2x$与x^2　　(4) $\tan x-\sin x$与x^3

解：输入以下 Mathematica 语句，分别作出它们的图形如图 2-17。

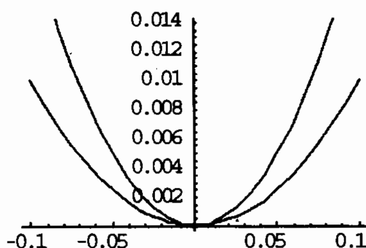
```
Plot[{x^2, 2x}, {x, -0.1, 0.1}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}];
Plot[{Sin[x], x}, {x, -1, 1}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}];
Plot[{1 - Cos[2*x], x^2}, {x, -0.1, 0.1},
        PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}];
Plot[{Tan[x] - Sin[x], x^3}, {x, -0.1, 0.1},
        PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}];
```



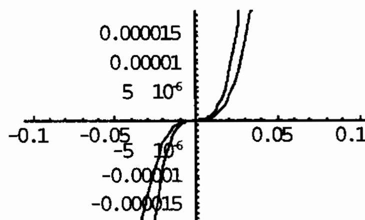
(1)



(2)



(3)



(4)

图 2-17

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x}=0$, 即 $x^2=o(2x)$, 从图形可以看出 x^2 趋于 0 的速度比 $2x$ 快。

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 即 $\sin x\sim x$，从图形可以看出 $\sin x$ 趋于 0 的速度基本上与 x 一致。

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, 即 $1-\cos 2x=O(x^2)$，从图形可以看出 $1-\cos 2x$ 趋于 0 的速度基本上与 x^2 一致，但比 x 快。

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$, 即 $\tan x-\sin x=O(x^3)$，从图形可以看出 $\tan x-\sin x$ 趋于 0 的速度基本上与 x^3 一致，但比 x 快。

练习 21　观察以下函数当 $x\to 0$ 时的变化趋势，并对它们的收敛速度进行比较。

(1) $x, \sin x, \tan x, \arcsin x, \arctan x, \ln(1+x), e^x-1$

(2) $1-\cos x$ 与 $\dfrac{1}{2}x^2$

(3) $(1+x)-1$ 与 $1-ax$

实验 18 观察 e^x 与 x^{10} 的变化趋势。

解：输入以下 Mathematica 语句，作出函数的图形如图 2-18。

```
Plot[{E^x, x^10}, {x, -1, 10}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0],
RGBColor[0, 0, 1]}];
```

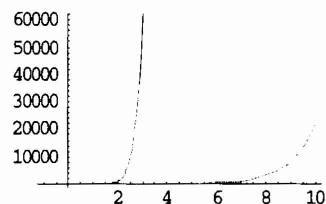


图 2-18

练习 22 观察 e^x 与 x^n（n 由你给定）的变化趋势，并给出你的结论。

附 实验 6～实验 10 Mathematica 程序

```
f[x_] := k*x*(1 - x);p[0] = 0.5; p[t_] := f[p[t - 1]];
k = 1.5; data = Table[p[i], {i, 30}];ListPlot[data, PlotStyle -> PointSize[0.015]];
k = 2.5; data = Table[p[i], {i, 50}];ListPlot[data, PlotStyle -> PointSize[0.015]];
k = 3.35; data = Table[p[i], {i, 30}];g1 = ListPlot[data, PlotStyle -> PointSize[0.02]];
g2 = ListPlot[data, PlotJoined -> True];Show[g1, g2];
k = 3.45; data = Table[p[i], {i, 100}];g1 = ListPlot[data, PlotStyle -> PointSize[0.02]];
g2 = ListPlot[data, PlotJoined -> True];Show[g1, g2];
k = 3.8; data = Table[p[i], {i, 100}];g1 = ListPlot[data, PlotStyle -> PointSize[0.015]];
g2 = ListPlot[data, PlotJoined -> True];Show[GraphicsArray[{g1, g2}]];Show[g1, g2];
k = 3.8; p[0] = 0.5 + 0.001; data = Table[p[i], {i, 100}];
g1 = ListPlot[data, PlotStyle -> PointSize[0.015]];
g2 = ListPlot[data, PlotJoined -> True];Show[GraphicsArray[{g1, g2}]];Show[g1, g2];
```

实验三　函数的连续与间断

本实验的目的是进一步理解函数连续的概念，熟悉几种间断点的类型与间断点的图形特征，以及一元连续函数的零点定理和求方程根的二分法。

3.1　一元函数连续的概念

函数在某一点连续就是在这一点处函数的极限存在且等于函数在该点的函数值。即：函数在该点应有定义，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在且相等，并等于函数在点 x_0 的定义值 $f(x_0)$。

连续也即对所有的数列 x_n，只要 $x_n \to x_0$，就有 $f(x_n) \to f(x_0)$。

实验 1　考察函数 $f(x) = \sin x$ 在 x =5 处的连续性。

解：选取几个 $\{x_n\}$，考察当 $x_n \to 5$ 时，$\sin x_n$ 的变化趋势，依次取 $x_n = 5 + \dfrac{1}{n}$，$x_n = 5 + (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$，$x_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{5n}$，当 $n \to \infty$ 时，它们的极限均为 5，输入以下 Mathematica 语句，作出相应的 $(x_n, \sin x_n)$ 的散点图如图 3-1。

```
g1 =ListPlot[Table[Sin[5 + 1/n], {n, 1, 1000, 5}], PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]];
g2 =ListPlot[Table[Sin[5 + (-1)^n/Sqrt[n]], {n, 1, 1000, 5}],
          PlotStyle -> RGBColor[0, 1, 0]];
g3 = ListPlot[Table[Sin[5*n*Log[(1 + 1/n)]], {n, 1, 1000, 5}],
          PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1]];
g = Show[g1, g2, g3];
```

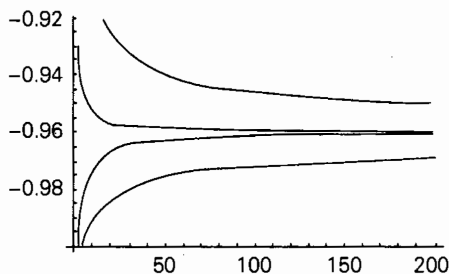


图 3-1

由图 3-1 可看出它们趋于同一极限值。

实验 1 表明：连续，即对所有的数列 $\{x_n\}$，只要 $x_n \to x_0$，就有 $f(x_n) \to f(x_0)$。

练习 1　任意选取另外一个函数，重复实验 1 的内容。

实验 2　令 $f(x)=\sin x$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{4}$，验证 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$。

解：输入以下 Mathematica 语句，作出点列散点图如图 3-2。

```
Clear[f, grf, Lx0, Ly0, Lxy, X, X0, Y, y0, Y0, XY]; f[x_] = Sin[x];
  X = Table[N[Pi]/4 - 2.0^(-p), {p, 1, 15}];   Y = Sin[X];
  X0 = Transpose[{X, 0 X}]; Y0 = Transpose[{0 Y, Y}]; XY = Transpose[{X, Y}];
  Lx0 = ListPlot[X0, DisplayFunction -> Identity];
  Ly0 = ListPlot[Y0, DisplayFunction -> Identity];
  Lxy = ListPlot[XY, DisplayFunction -> Identity];   Print["y = ", f[x]];
  grf = Plot[f[x], {x, 0, 0.8}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0],
        PlotRange -> {{0, 0.8}, {0, 1.05}}, DisplayFunction -> Identity];
  Show[grf, Lx0, Ly0, Lxy, PlotRange -> {{0, 0.8}, {0, 0.72}},
Prolog -> {PointSize[0.02]}, Ticks -> {Range[0, 1, 0.1], Range[0, 1, 0.1]},
      DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

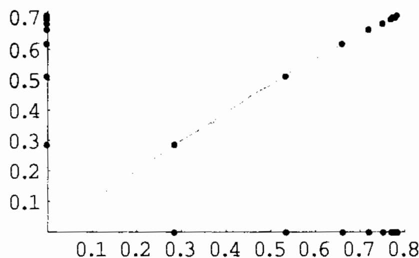


图 3-2

练习 2　令 $f(x)=\mathrm{e}^x$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，验证 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(0)=1$。

练习 3　任意选取一个连续函数，重复实验 2 的内容。

3.2　不同类型间断点的图形特征

下面将说明各种不同类型间断点的图形特征。

实验 3　函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 点处间断，且间断点为可去间断点，请观察其图形特征。

解：取 x=0 附近的一个较小区间，如 $[-0.1,0.1]$，输入以下 Mathematica 语句，作出 $y=f(x)$ 的图形如图 3-3。

```
Plot[Sin[x]/x, {x, -0.1, 0.1}];
```

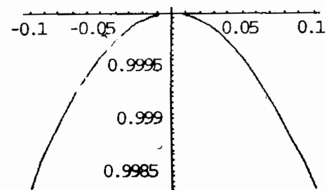


图 3-3

练习 4　试解释你所看到的结果，若将区间换为[0,0.1]又会出现什么结果？

实验 4　（跳跃间断点）考虑符号函数 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & ,x>0\\ 0 & ,x=0\\ -1 & ,x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点处的间断情况。

解：输入以下 Mathematica 语句，作出$\mathrm{sgn}(x)$的图形如图 3-4。

```
f[x_] := Which[x > 0, 1, x < 0, -1, x == 0, 0];Plot[f[x], {x, -1, 1}];
```

由图 3-4 可见，在$x=0$点处函数的图形由-1一直跃为$+1$。

练习 5 观察函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\geqslant 0\\ x \quad ,x<0\end{cases}$的图形特征，并判断在点$x=0$处的间断点类型。

实验 5 （无穷间断点）考察函数$f(x)=\sec x$，在区间$[0,2\pi]$上作出$f(x)=\sec x$的图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，在区间$[0,2\pi]$作出$f(x)$的图形如图 3-5。

```
Plot[Sec[x], {x, -2*Pi, 2*Pi}];
```

图 3-5 中出现的两条竖线为图形的两条铅直渐近线。

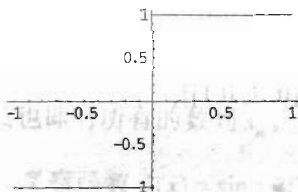


图 3-4

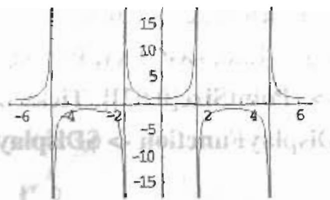


图 3-5

练习 6 观察函数$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$的图形特征，并指出点$x=0$处的间断点类型。

实验 6 （振荡间断点）考察函数$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$在点$x=0$处的连续性。

解：选取$x=0$附近的一个小区间[-0.1,0.1]，输入以下 Mathematica 语句，作出函数的图形如图 3-6。

```
Plot[Sin[1/x], {x, -1, 1}];   Plot[Sin[1/x], {x, -0.01, 0.01}];
```

由图 3-6 可看出，在$x=0$点附近函数波动线极为密集。事实上，再取更小的区间如$[-0.01,0.01]$作图如图 3-7，在$x=0$点附近函数的波动线更为密集。

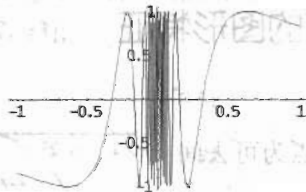


图 3-6

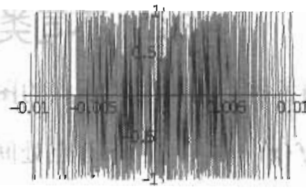


图 3-7

练习 7 观察函数$f(x)=\cos\dfrac{1}{x-1}$的图形特征，并指出$x=1$点的间断点类型。

3.3 二分法求根

设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$f(a)\cdot f(b)<0$，且方程$f(x)=0$在(a,b)内仅有一个实根ξ，这时我们就以$[a,b]$作为隔离区间。首先取$[a,b]$的中点，$x_1=\dfrac{a+b}{2}$，计算$f(x_1)$。

(1) 如果$f(x_1)=0$，则$x_1=\xi$即为所求。

(2) 如果 $f(x_1)\neq 0$ 且与 $f(b)$ 异号，即 $f(x_1)\cdot f(b)<0$, 则取 $a_1=x_1, b_1=b$；

(3) 如果 $f(x_1)\neq 0$ 且与 $f(a)$ 异号，即 $f(x_1)\cdot f(a)<0$, 则取 $a_1=a, b_1=x_1$。

然后，我们再以 $[a_1,b_1]$ 为隔离区间，取 $x_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$，若 $f(x_2)=0$，则 $x_2=\xi$ 即为所求；若当 $f(x_2)\neq 0$ 时，则重复上述（2）、（3）的做法，以 x_2 为隔离区间 $[a_2,b_2]$ 的一个端点，继续下去，如此过程重复 n 次，可得隔离区间 $[a_n,b_n]$，$b_n-a_n=\dfrac{1}{2^n}(b-a)$。若以 a_n 或 b_n 或它们的中点 $\dfrac{a_n+b_n}{2}$ 作为根 ξ 的近似值，则其误差小于 $\dfrac{1}{2^n}(b-a)$。

现在把以上的计算程序介绍如下：

```
f[x_] :=表达式;
a0 = 值; b0 = 值; delta =值; k0 =值; a = a0; b = b0;
Do[x = (a + b)/2; Print[x];
  If[f[x] == 0, Break[], If[f[x]*f[b] < 0, a = x, b = x]];
  If[Abs[b - a] < delta, Break[], If[k == k0, Print[失败]]], {k, k0}]
```

如果精度要求很高，则在取初值 a_0,b_0 要有相应的精度，或用整数或整数之商表示，关于方程求根问题将在实验二十四中作进一步讨论。

实验 7 在区间(1,2)内求方程 $f(x)=4x^3-6x^2+3x-2=0$ 的根，要求精度为 eps=10^{-4}。

解：将以上程序稍作修改，用二分法计算的结果为 $x=1.2211$。

练习 8 为了在海岛 I 与某城市 C 之间铺设一条地下光缆，每千米光缆的铺设成本在水下部分是 c_1，在地下部分是 c_2，为使得铺设该光缆的总成本最低，光缆的转折点 P（海岸上一点）应该取在何处？（误差小于 10^{-3}km）

实验四　一元函数微分学

本实验的目的是，进一步理解导数的概念及其几何意义，从几何上直观理解微分中值定理，进一步掌握泰勒展开与函数逼近的思想，了解导数的应用。

4.1　导数的几何意义

本节我们将从几何、分析和数值的角度来阐述导数的概念。

4.1.1　导数为一极限值

1. 从数值的角度

导数是函数增量 $f(x+\Delta x)-f(x)$ 与引起这个增量的自变量增量 Δx 的比值当 $\Delta x \to 0$ 时的极限。

实验 1　考察函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $x_0=0$ 处的导数。

解：记 $h=\Delta x$，并取 h 逐渐变小时的一些不同值，如，$h=1.0, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, 0.000001$ 计算所得比值。输入以下 Mathematica 语句：

```
f[x_] := Exp[x]; d2 = 0; d1 = 1.; error = 0.000001; x0 = 0; i = 0; m = 1/error;
While[Abs[d2 - d1] > error, h = 1/10^i; d2 = d1;
 d1 = N[(f[x0 + h] - f[x0])/h, 20]; i = i + 1; Print["h=    ", N[h], "       增量比", d1]]
```

观察比较所得的结果，可知极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=1=f'(x_0)$。

练习 1　考察函数 $f(x)=x^2$ 在 $x_0=1$ 处的导数。

2. 从左、右极限的角度

我们也可以利用 Mathematica 直接求增量比的极限来考察可导性。

实验 2　利用左、右极限考察函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的增量比的左右导数。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad 和 \quad \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

解：输入以下 Mathematica 语句：

```
Clear[a, h] ;f[x_] = Exp[x]; Limit[(f[h] - f[0])/h, h -> 0, Direction -> +1]
Limit[(f[h] - f[0])/h, h -> 0, Direction -> -1]
```

由计算结果可得左、右极限存在且相等为 1，表明导数

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=1。$$

练习 2　考察函数 $f(x)=5^x$ 在 $x_0=1$ 处的导数。

3. 从图形的角度

我们还可以取 h 逐渐变小时的一些不同值，并将所计算得到的各相应增量比制成一个表，并画出表中数据的散点图，从图形上直接观察增量比的变化趋势。

实验 3 考察函数 $f(x)=e^x$ 在 $x_0=0$ 处的导数。

解：令 $\Delta x=h=\frac{1}{i^2}(i=1,2,\cdots,50)$，作函数值组成的表，并画出其散点图如图 4-1，输入以下 Mathematica 语句：

```
f[x_] = Exp[x];;x0 = 0;f1 = Table[(f[x0 + 1/i^2] - f[x0])*i^2, {i, 50}] // N;
f2 = Table[(-f[x0 - 1/i^2] + f[x0])*i^2, {i, 50}] // N;
p1 = ListPlot[f1, DisplayFunction -> Identity];
p2 = ListPlot[f2, DisplayFunction -> Identity];
Show[p1, p2, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

从图形可以看出 i 逐渐变大（即 $h\to 0$ 时），增量比逐渐接近于 1。此外，输入 Mathematica 语句，**Plot[(f[h] - f[0])/h, {h, -0.01, 0.01}];** 所得图形如图 4-2。

观察所得图形，在 $x_0=0$ 点附近的情况，可知 $h\to 0$ 时，$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\to 1$。

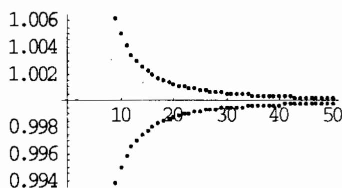


图 4-1

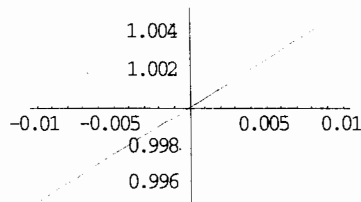


图 4-2

练习 3 考察函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x_0=0$ 处的导数。

4.1.2 导数的几何意义

下面将以图形的方式考察函数的图形及其在某点处的切线、割线三者之间的关系。

实验 4 考察函数 $f(x)=x^4+x^2$ 在 $x_0=1.5$ 处函数图形及在该点处的切线、割线三者之间的关系。

解：过点 $(x_0,f(x_0))$ 的割线方程为 $y=f(x_0)+\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)$，切线方程为 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$。取 $h=1$，将 $f(x)$ 以及 $f(x)$ 在点 $x_0=1.5$ 处的割线和切线的图形画在同一图形中，并分别取越来越小的 h，比如取 $h=0.8,0.4,0.2,0.1,0.01,0.001$ 观察其执行结果，并加以比较，可知割线趋向于切线，且当 h 越来越小时，割线与切线逐渐重合，即割线的极限位置为切线位置，也即割线斜率（即增量比或平均变化率）的极限（导数）为切线斜率。因此，函数在某点处的导数是函数在这一点处的瞬时变化率。

我们还可以输入以下 Mathematica 语句画出上述图形（部分图形如图 4-3），实现动态比较。

```
f[x_] := x^4 + x^2;
For[i = 1, i <= 200, i *= 1.2, h = 1/i;
    Plot[{f[x], f[1.5] + f'[1.5]*(x - 1.5), f[1.5] + (f[1.5 + h] - f[1.5])/h*(x - 1.5)}, {x, 1, 3},
        AspectRatio -> 1, PlotRange -> {{1, 3}, {0, 60}}, PlotStyle ->
         {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]];
```

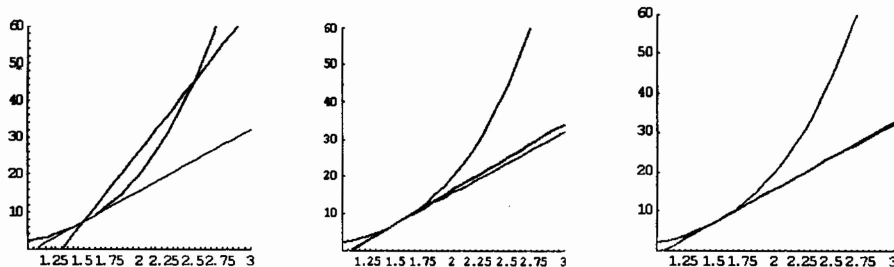


图 4-3

练习 4 考察函数 $f(x)=x^2+2x+5$ 在 $x_0=2$ 处的函数图形、切线、割线的关系。

练习 5 观察函数 $f(x)=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ 的图形，并计算 $f'\left(\dfrac{1}{1000}\right)$，给出你的结论。

练习 6 对于函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$。

(1) 画出函数 $f(x)$ 的图形；

(2) 研究 $f'(0)$ 并证明你的结论；

(3) 画出函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}$ 的图形，并研究 $f'(0)$；

(4) 画出函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}$ 的图形，并研究 $f'(0)$；

(5) 任给一个 n，画出函数 $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}$ 的图形，并研究 $f'(0)$。试将所得到的结论与（2）、（3）、（4）的结论相比较。

练习 7 设 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$。

(1) 画出函数 $f(x)$ 的图形；

(2) 作出曲线 $y=f(x)$ 过两点（1，5）和（8，8.5）的割线；

(3) 找出点$c\in(1,8)$,使得$f(8)-f(1)=f'(c)(8-1)$，然后作出曲线$y=f(x)$在点$(c,f(c))$处的切线，观察此切线与(2)中作出的割线的位置关系。

练习 8 在区间$[-\pi,\pi]$上作出函数$f(x)=x\sin^2 x$及其导函数$f'(x)$的图形，指出它们所对应的曲线，并观察其图形特征。

4.2 微分中值定理与函数性态的研究

4.2.1 中值定理

实验 5 对函数$f(x)=x(x-1)(x-2)$，观察罗尔定理的几何意义。

解：因为$f(0)=f(1)=f(2)=0$，由罗尔定理，存在$x_1\in(0,1),x_2\in(1,2)$使得$f'(x_1)=f'(x_2)=0$。

(1) 画出$y=f(x)$与$y=f'(x)$的图形如图 4-4，并求出x_1与x_2。

```
f[x_] = x*(x - 1)*(x - 2);g1 = Plot[f[x], {x, -1, 3}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]];
g2 = Plot[f'[x], {x, -1, 3}];Show[g1, g2];NSolve[f'[x] == 0, x]
```

(2) 画出$y=f(x)$及其在点$(x_1,f(x_1))$与$(x_2,f(x_2))$处的切线如图 4-5。

```
t1[x_] = f[0.42265]; t2[x_] = f[1.57735];Plot[{f[x], t1[x], t2[x]}, {x, -1, 3}];
```

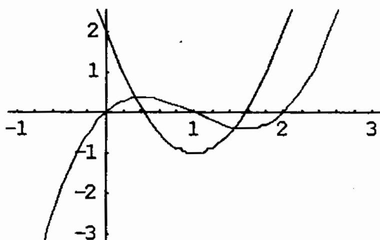


图 4-4

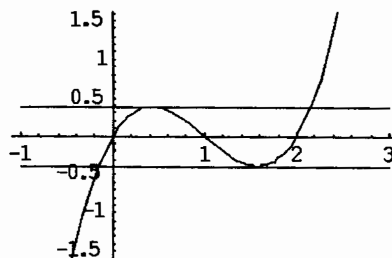


图 4-5

实验 6 对函数$f(x)=\ln(1+x)$，在区间[0,4]上观察拉格朗日中值定理的几何意义。

解：（1）画出$y=f(x)$及其左、右端点连线的图形如图 4-6；

```
Clear[g1, g2];f[x_] = Log[1 + x];a = 0; b = 4;
g1[x_] := f[a] + (f[b] - f[a])*(x - a)/(b - a);
g2[x_] := f'[x] - (f[b] - f[a])/(b - a);Plot[{f[x], g1[x]}, {x, a, b}];
```

(2) 画出函数$y=f'(x)-\dfrac{f(4)-f(0)}{4-0}$的曲线如图 4-7，并求出$\xi$使得$f'(\xi)=\dfrac{f(4)-f(0)}{4}$。

```
Plot[g2[x], {x, a, b}];NSolve[f'[x] == (f[b] - f[a])/(b - a), x];
```

(3) 画出$y=f(x)$，它在ξ处的切线及它在左、右端点连线的图形如图 4-8。

```
x1 = 1.4853397382384472;g3[x_] = f[x1] + f'[x1]*(x - x1);
Plot[{f[x], g1[x], g3[x]}, {x, a, b}];
```

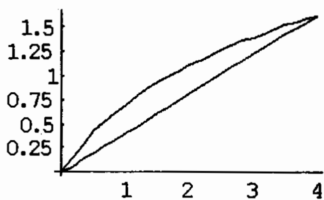


图 4-6

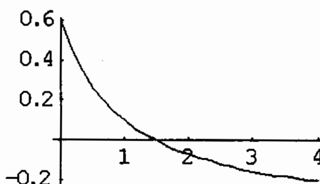


图 4-7

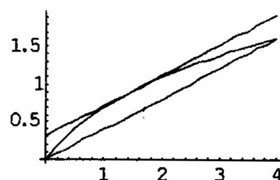


图 4-8

4.2.2 函数性态的研究

微分学中一个典型问题是判别函数的驻点和拐点。

实验 7 已知函数 $f(x)=2x^6+3x^5+3x^3-2x^2$，在区间 $[-3,2]$ 上画出函数 $f(x),f'(x),f''(x)$ 的图形，并找出所有的驻点和拐点。

解：输入以下 Mathematica 语句，图形如图 4-9。

```
f[x_] = 2*x^6 + 3*x^5 + 3*x^3 - 2*x^2;Plot[f[x], {x, -3, 2}];
df[x_] = f'[x]; ddf[x_] = f''[x];Plot[df[x], {x, -2, 1}];
Plot[df[x], {x, -0.2, 0.5}];Plot[ddf[x], {x, -2, 1}];
Plot[{f[x], df[x], ddf[x]}, {x, -0.6, 0.6},
    PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}];
NSolve[df[x] == 0, x]NSolve[ddf[x] == 0, x]
```

实验 8 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^6-2x^5-\frac{25}{2}x^4+60x^3-150x^2-180x-25$，在区间 $[-6,6]$ 上画出函数 $f(x),f'(x),f''(x)$ 的图形，并找出所有的驻点和拐点。

解：输入以下 Mathematica 语句，图形如图 4-10。

```
f[x_] = x^6/2 - 2*x^5 - 25*x^4/2 + 60*x^3 - 150*x^2 - 180*x - 25;
Plot[{f[x], f'[x], f''[x]}, {x, -6, 6},
    PlotStyle -> {GrayLevel[0], Dashing[{0.01`}], RGBColor[1, 0, 0]}];
NSolve[f'[x] == 0, x]NSolve[f''[x] == 0, x]
```

实验 9 设 $f(x)=\frac{1}{4}((x-2)(x-1)(x+0.5)(x+2)(x+2.5)(x+3)(x-2.7)+10)(1.5-x)$，在区间 $[-4,4]$ 上分别画出 $f(x),f'(x),f''(x)$ 的图形，并找出所有的驻点和拐点。

解：输入以下 Mathematica 语句，图形如图 4-11。

```
f[x_] = ((x - 2)*(x - 1)*(x + 0.5)*(x + 2)*(x + 2.5)*(x + 3)*(x - 2.7) + 10)*(1.5 - x)/4;
Solve[f'[x] == 0, x];tdf = Table[{x, f'[x]}] /. %;tf = Table[{x, f[x]}] /. %%;
g1 = Plot[{f[x], f'[x], f''[x]}, {x, -3, 2.5}, lotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], Dashing[{0.01`}],
        RGBColor[0, 0, 1]}, DisplayFunction -> Identity];
g2 = ListPlot[tf, PlotStyle -> PointSize[0.02], DisplayFunction -> Identity];
g3 = ListPlot[tdf, PlotStyle -> PointSize[0.02], DisplayFunction -> Identity];
Show[g1, g2, g3, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

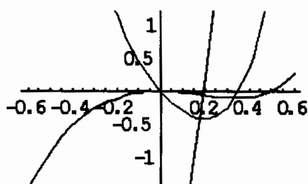


图 4-9

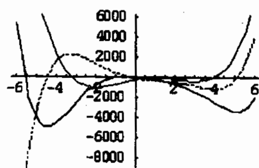


图 4-10

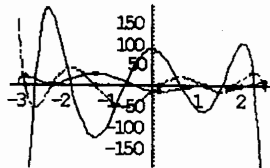


图 4-11

练习 9 分析实验 7～实验 9 的结果，你能得到什么结论？

练习 10 判别函数 $f(x)=x^4-2x^3-5x^2$ 在区间 $(-1.5,3)$ 内的所有极值点。

实验 10 对于函数 $f(x)=2\sin^2 2x+\frac{5}{2}x\cos^2\frac{x}{2}$，在区间 $[0,\pi]$ 上找一点 x，使得在 $(x,f(x))$ 点处的切线水平。

解：输入以下 Mathematica 语句，图形如图 4-12。

```
Clear[f] ;f[x_] = 2*Sin[2 x]^2 + 5 x Cos[x/2]^2/2;Plot[f[x], {x, 0, Pi}];
Plot[{f[x], f'[x]}, {x, 0, Pi}];FindRoot[f'[x] == 0, {x, 0.8}];f[x] /. %
FindRoot[f'[x] == 0, {x, 1.5}];f[x] /. %
FindRoot[f'[x] == 0, {x, 2}];f[x] /. %
```

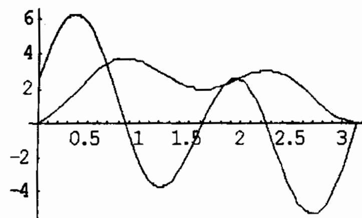


图 4-12

练习 11 作出函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+c}$ （$-5\leqslant x\leqslant 4$）的图形，c 分别取-1,0,1,2,3 等 5 个值，试比较作出的 5 个图，并从图上观察极值点、驻点、单调区间、凹凸区间以及渐近线。

4.3 泰勒公式与函数逼近

在泰勒展开式中，若忽略泰勒余项，用 n 次多项式作为函数的近似值，会产生截断误差。截断误差的大小，即为泰勒余项，对泰勒余项进行估计，就可以确定截断误差的范围。如

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta\,\Delta x)\Delta x^{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

若 $\left|f^{(n+1)}(x)\right|<M$，则截断误差

$$|R_n|=\left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta\,\Delta x)\Delta x^{n+1}\right|<\frac{M}{(n+1)!}|\Delta x|^{n+1}$$

实验 11 利用泰勒公式 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$ 近似计算 e^x。若 $|x|<1$，要求截断误差 $|R_n|<0.005$，问 n 应取多大？

解：因为 $|R_n|=\left|\frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{e}{(n+1)!}|x|^{n+1}<\frac{3}{(n+1)!}$，所以，欲使 $|R_n|<0.005$，只要取 $n=5$ 即可，

输入以下 Mathematica 语句，得结果见表 4-1。

```
f[x_] = Normal[Series[Exp[x], {x, 0, 5}]]
Table[N[{x, Exp[x], f[x], Exp[x] - f[x]}], {x, -1, 1, 0.4}]
```

实验 12 （观察 x_0 和 n 对误差的影响）分析利用泰勒展开式近似计算 sin 7 时 x_0 和 n 的影响。

解：(1) 输入以下 Mathematica 语句，定义泰勒展开函数 $\text{tsin}[x, x_0, n]$；

```
tsin[x_, a_, n_] := Module[{f, u}, f = Normal[Series[Sin[t], {t, a, n}]];
    u = f /. t -> x; Return[N[u, 10]]]
```

(2) 固定 x_0=0，观察阶数 n 对误差的影响。

```
a = 0;Table[N[{n, tsin[7, a, n], Sin[7] - tsin[7, a, n]}], {n, 5, 30, 5}]
```

由表 4-2 可看出当 n 增大时，误差变小。

表 4-1 泰勒公式的截断误差

Δx	e^x	$p(x)$	截断误差 $R_n(\Delta x)$
−1.00	0.367879	0.366667	0.00121277
−0.60	0.5488812	0.548752	0.0000596361
−0.20	0.818731	0.818731	8.64113×10^{-8}
0.20	1.2214	1.2214	9.14935×10^{-8}
0.60	1.82212	1.82205	0.0000708004
1.00	2.71828	2.71667	0.00161516

表 4-2 阶数 n 对截断误差的影响

n	$\text{tsin}[7, x_0, 5]$	截断误差
5	89.8917	−89.2347
10	37.694	−37.037
15	0.0867075	0.570279
20	0.647032	0.00995448
25	0.656992	-5.68898×10^{-6}
30	0.656987	-1.83325×10^{-8}

(3) 固定 n=5，观察 x_0 的影响。

```
n = 5;Table[N[{a, tsin[7, a, n], Sin[7] - tsin[7, a, n]}], {a, 3, 10}]
```

由表 4-3 可看出，误差随着 $\Delta x = |x - x_0|$ 的减小而变小。

表 4-3 初始点 x_0 对误差的影响

x_0	$\text{tsin}[7, x_0, 5]$	截断误差	x_0	$\text{tsin}[7, x_0, 5]$	截断误差
3.00	−1.33055	1.98753	7.00	0.656987	0
4.00	−0.248563	0.905549	8.00	0.658365	−0.00137831
5.00	0.584393	0.0725938	9.00	0.713015	−0.560288
6.00	0.656793	1.000193336	10.00	0.508515	0.148471

实验 13 （根据图形观察泰勒展开的误差）观察函数 $f(x) = \sin x$ 各阶泰勒展开的图形。

解：(1) 固定 x_0=0，观察阶数 n 的影响，如图 4-13、图 4-14。

```
gs25 = tsin[x, 0, 25]; gs15 = tsin[x, 0, 15]; gs05 = tsin[x, 0, 5];
Plot[{Sin[x], gs25, gs15, gs05}, {x, 0, 5 Pi}, PlotRange -> {-3, 3},
    PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[1, 1, 0], RGBColor[1, 0, 0],
        RGBColor[0, 1, 1]}, Background -> RGBColor[0.753, 0.753, 0.753]];
```

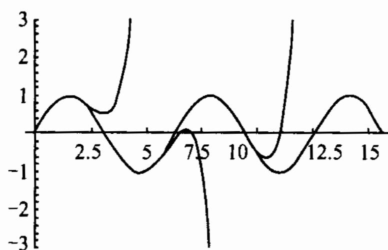


图 4-13

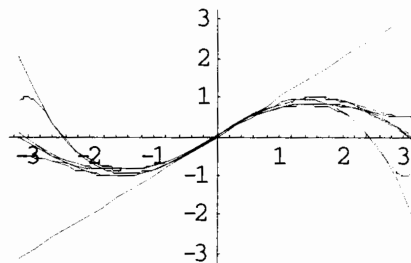


图 4-14

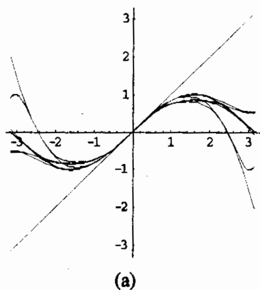
(2) 扩大显示区间范围，以观察在偏离展开点 x_0 时泰勒多项式对函数的逼近情况。

```
t = Table[Normal[Series[Sin[x], {x, 0, i}]], {i, 1, 19, 2}];
PrependTo[t, Sin[t]];Plot[Evaluate[t], {x, -Pi, Pi}];
Plot[Evaluate[t], {x, -Pi, Pi}, AspectRatio -> Automatic];
Plot[Evaluate[t], {x, -2 Pi, 2Pi}, AspectRatio -> Automatic];
Plot[Evaluate[t], {x, -3 Pi, 3 Pi}, AspectRatio -> Automatic];
```

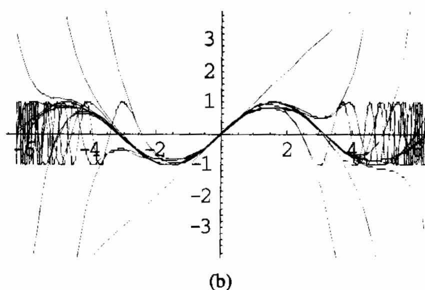
通过观察泰勒多项式图形与函数图形（如图 4-15）的重合与分离情况，可以看到在 $[-\pi,\pi]$ 范围内 $y=\sin x$ 的 9 次泰勒多项式与函数图形几乎重合，而在 $[-2\pi,2\pi]$ 范围内 $y=\sin x$ 的各次泰勒多项式陆续与 $y=\sin x$ 的图像分离，但其 15 次以及更高次的泰勒多项式仍紧靠着 $y=\sin x$，而在 $[-3\pi,3\pi]$ 范围内，其 15 次泰勒多项式的图形也与 $y=\sin x$ 的图像分离。由此可见，函数的泰勒多项式对于函数的近似程度随着次数的提高而提高，但对于任一确定次数的多项式，它只在展开点附近的一个局部范围内才有较好的近似精确度。

(3) 固定 n=10，观察 x_0 的影响，如图 4-16。

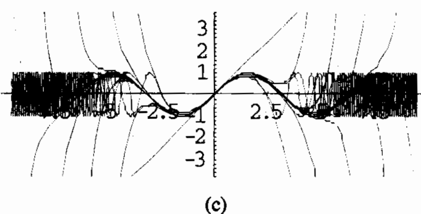
```
Clear[gs0, gs5, gs12, t];gs0 = tsin[x, 0, 10];gs5 = tsin[x, 5, 10];gs12 = tsin[x, 12, 10];
Plot[{Sin[x], gs0, gs5, gs12}, {x, 0, 6 Pi}, PlotRange -> {-3, 3},
    PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[1, 1, 0], RGBColor[1, 0, 0],
        RGBColor[0, 1, 1]}, Background -> RGBColor[0.753, 0.753, 0.753]];
```



(a)



(b)



(c)

图 4-15

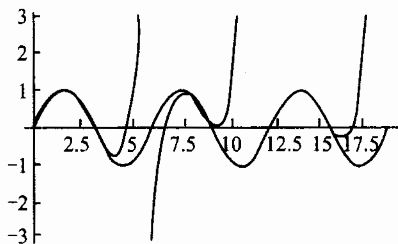


图 4-16

练习 12 利用泰勒展开式的近似计算，完成以下任务：

(1) 根据 $y = \ln(\cos x^2 + \sin x)$ 的图形回答：函数的定义域；函数是否满足泰勒展开的条件；函数在什么范围内可以泰勒展开。

(2) 取不同的 x_0，利用泰勒展开式近似计算 y 在 x=0.8 和 x=2 处的值，并列表总结实验结果。

练习 13 泰勒展开的图形分析。

(1) 作出 $y = \ln(\cos x^2 + \sin x)$ 的函数图形和 y 的泰勒展开式（选取不同的 x_0 和 n 值）的图形，并将图形进行比较。

(2) 从 x_0 和 n 两个角度分析泰勒展开方法，结合泰勒余项进行总结。

练习 14 用泰勒展开式逼近对数函数 $\ln(1+x)$，x 的取值范围为 $(0,1.5]$，泰勒多项式的次数依次取 $1,2,\cdots,10$，观察这些多项式逼近 $f(x)$ 的情况，并与 $\sin x$ 的泰勒多项式逼近 $\sin x$ 的情况比较。试分析两者的差别及造成这些差别的原因。

4.4 导数的应用

练习 15 （飞机安全降落曲线的确定）飞机为了安全降落，必须在开始降落时和着陆时保持水平飞行姿态，还必须在下降过程中保持较小的铅直加速度（否则乘客将感到不适），试确定满足上述要求的飞机安全降落曲线。

练习 16 试选择余弦曲线 $f(x) = a\cos[b(x+c)] + d$ 作为飞机的降落曲线，重复上述实验。[提示：先利用余弦函数性质可得：$a = d = \dfrac{h}{2}$，c 的值可从 $f(-l) = h$ 求得，最后从 $f(0) = 0$ 可求出 b。]

练习 17 现有两个等强度的光源 A、B 相距 10m。已知单光源对某点的光照强度与光源的强度成正比，与光源到该点的距离的平方成反比。设线段 CD 与 AB 平行相距 dm，其中 AC 和 BD 均与 AB 垂直。现要在线段 CD 上求光照强度最小的一点 P。

练习 18 设圆柱形铁皮罐头的体积为 V，高为 h，底面半径为 r。若 V 给定，问 $\dfrac{h}{r}$ 应等于多少，才能使罐头表面面积最小（从而使材料费最小）？这个问题很易解决，其答案是 $\dfrac{h}{r} = 2$。

然而，如果你到超市观察一下货架上的各种罐头，会发现多数罐头的高比底面直径大，比值大致在 2～3.8 之间变动，我们试探索一下其中的道理。

(1) 制作罐头铁皮是从大铁皮板上切割下来的。罐头的侧壁用矩形铁皮围成，从大铁皮板上切割矩形片不会产生多少边角废料；而如果从一块正方形铁皮上切割下一块块的圆片，则不可避免地会余下一些边角料而造成浪费（见图 4-17）。如果把废弃的边角料也计算在所用的材料内，那么为了使用去的材料最小，证明$\frac{h}{r}$应该等于$\frac{8}{\pi}\approx 2.55$。

(2) 为了在切割圆片时尽量少浪费些材料，可在大铁皮板上排列如图 4-18 所示的正六边形，而将圆片从六边形上切割下来，若使用这种做法，证明最经济的外形满足

$$\frac{h}{r}=\frac{4\sqrt{3}}{\pi}\approx 2.21$$

(3) 除了材料费外，还需考虑罐头的制作费。可以假定影响制作费大小的值主要是接缝的长度，试以情况（2）为例，说明罐头制作的总费用正比于下式表示的量：

$$4\sqrt{3}r^2+2\pi rh+k(4\pi r+h)$$

其中常数 k 表示单位长的接缝费相当于多少单位面积的铁皮价格，并证明当上式达到最小时，$\frac{h}{r}$必满足下式：

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k}=\sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}}\cdot\frac{2\pi-h/r}{\pi h/r-4\sqrt{3}}$$

(4) 记 $y=\frac{\sqrt[3]{V}}{k},x=\frac{h}{r}$，利用计算机画出函数

$$y=\frac{\sqrt[3]{\pi x}(2\pi-x)}{\pi x-4\sqrt{3}}$$

的图形，并利用此图形说明，当体积 V 较大或接缝费较小（即 k 较小）时，$\frac{h}{r}$应接近于 2.21；而当 V 较小或接缝费较大时，$\frac{h}{r}$就要有较大增加。

这说明，体积较大的罐头，其外形应矮胖些，而体积较小的罐头，其外形则应瘦长些。

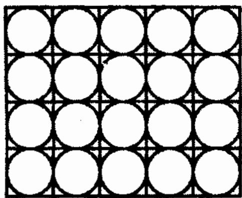


图 4-17

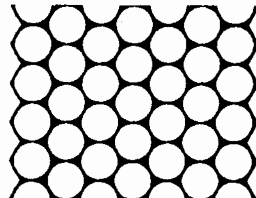


图 4-18

实验五 一元函数积分学

本实验的目的是加深理解定积分的概念，深入理解积分理论中分割、近似、求和、取极限的思想方法，初步了解定积分的近似计算方法。

5.1 定积分的概念

5.1.1 由定义计算定积分

在定积分的定义中，划分积分区间的方法与在每个小区间上取的点ξ_i都是任意的，如果当分划的每个小区间长度的最大值λ趋于0时，它的黎曼和存在极限，此极限值即为我们所定义的一个函数在一个指定的区间上的定积分。

实验1 利用定义计算积分$\int_0^1 x^2 dx$。

解：在区间[0, 1]中插入n-1个分点（我们可以均匀地产生，也可以借助随机数任意产生），在一定意义下取得了任意分点与任意的ξ_i计算$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，即可求得$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$的近似值。提高精度的方法是增加分点。输入以下 Mathematica 语句：

```
Clear[f, x];f[x_] := x^2; a = 0; b = 1; n = 20; Array[x, {641}]; x[0] = a;
For[k = 1, k <= 6, k++,    x[n] = b; s = 0;
  Do[x[i] = (i + Random[])*(b - a)/n, {i, 1, n - 1}];
    For[i = 0, i < n, i++, delxi = x[i + 1] - x[i]; c = x[i] + delxi*Random[];
    s = s + f[c]*delxi ];    Print["n=", n, "        s=", s]; n = n*2]
```

得结果为：s=0.332547。由于分割的任意性及ξ_i的任意性，即使n固定，每次运行所得的结果也很可能不同，表5-1给出其中的一组实验结果。

表5-1 根据定义计算定积分$\int_0^1 x^2 dx$的近似值

n	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	均匀划分
20	0.332547	0.328223	0.336509	0.323042	0.331204	0.333125
40	0.335564	0.33393	0.333617	0.333073	0.327678	0.333281
80	0.332935	0.332832	0.33348	0.334876	0.332891	0.33332
160	0.332621	0.333104	0.333039	0.333483	0.333468	0.33333
320	0.333368	0.333357	0.333219	0.333312	0.333383	0.333333
640	0.333368	0.333359	0.333324	0.333306	0.33335	0.333333

由表 5-1 中可以看出，表中任何两个数据都不完全相同，但它们之间的差异不大，特别是当 n=640 时，5 次运行的结果前 4 位有效数字是一样的，因为我们可以认为 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x \approx 0.3333$。

练习 1 利用定义计算 $\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$。

5.1.2 从图形观察积分和与定积分的关系

定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积，而积分和 $\lim\limits_{\lambda \to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 在几何上表示 n 个小矩形的面积和，其中第 i 个小矩形的高为 $f(\xi_i)$，宽为 Δx_i。

实验 2 从图形上观察 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x$ 的积分和与定积分的关系。

解：设曲边梯形由 $y=\sin x$，$y=0$，$x=\dfrac{\pi}{2}$ 为界。我们采用分划的方法，用小区间上矩形的面积来逼近曲边梯形的面积，所采用的 Mathematica 程序附后。

由图 5-1 可以看出，当分划越来越细时，所得到的小矩形面积之和与曲边梯形的面积 S 之间的差距（称之为误差）变得越来越小。当每个小区间都缩向一点时，误差为 0，即小矩形面积之和趋于 S。

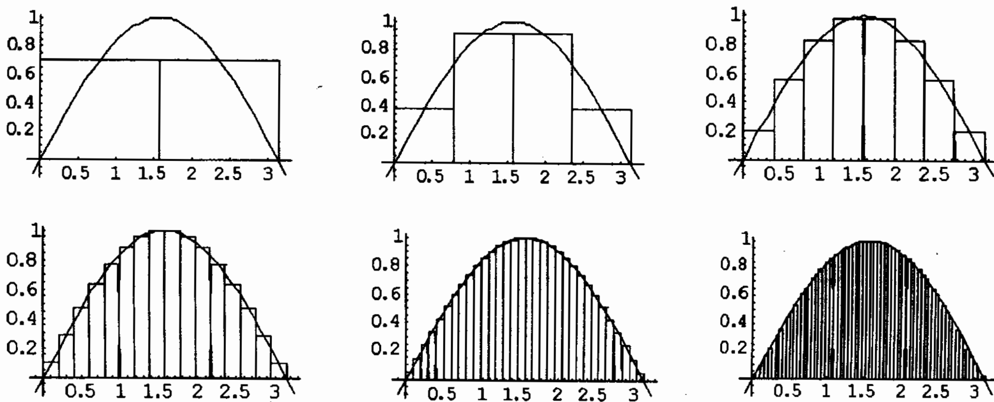


图 5-1

练习 2 从图形上观察 $\int_0^4 (1-2^{-x^2})\,\mathrm{d}x$ 的积分和与定积分的关系。

5.1.3 用定义计算定积分的简化

前面直接用定义计算积分和的方法显得很繁琐。为了使计算简单些，现对定义中的积分和加以分析：设函数 $f(x)$ 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上有最值，分别记为 M_i（最大值）和 m_i（最小值）$(i=1,2,\cdots,n)$，则有 $m_i\Delta x_i \leqslant f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant M_i\Delta x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$。求和得到

$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$，记 $\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$，$\underline{S} = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ 分别称为上积分和下积分和。显然，若用积分和近似积分值，其产生的误差不超过上、下积分和之差。

当 $\lambda \to 0$ 时，$\overline{S}$ 和 $\underline{S}$ 的极限存在且相等，则 S 的极限即定积分也存在，且等于上积分和或下积分和的极限。

实验 3 利用上积分和、下积分和计算 $\int_0^1 3x^2 \mathrm{d}x$。

解：函数 $f(x)=3x^2$ 在区间[0, 1]上是单调增加的，故在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上，其最大值 $M_i = f(x_i)$，最小值 $m_i = f(x_{i-1})$，于是：$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$，$\underline{S} = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$。表 5-2 所列，结果表明，只要分割点充分多，$\overline{S}$和$\underline{S}$ 的差可以任意小，所采用的 Mathematica 程序附后。

表 5-2 $\int_0^1 3x^2 \mathrm{d}x$ 的值

n	$\overline{S}$	$\underline{S}$	$\lvert\overline{S}-\underline{S}\rvert$	n	$\overline{S}$	$\underline{S}$	$\lvert\overline{S}-\underline{S}\rvert$
20	1.07625	0.92625	0.15	160	1.00939	0.990645	001875
40	1.03781	0.962813	0.075	320	1.00469	0.995317	0.009375
80	1.01883	0.981328	0.0375	640	1.002340	0.997657	0.004685

当定积分存在时，所有任取的积分和当 $\lambda \to 0$ 时的极限都相同，此时可以选择较简单的划分与简单的 ξ_i。一般地，将区间等分，且让小区间的某端点作为 $\xi_i (i=1,2,\cdots,n)$，这样积分和便成为：

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}(i-1)\right)\frac{b-a}{n} \tag{5-1}$$

或

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right)\frac{b-a}{n} \tag{5-2}$$

实验 4 用(5-1)式或(5-2)式计算定积分 $\int_0^M x\mathrm{d}x$（其中 M 为正数）。

解：因为被积函数 $f(x)=x$ 在 $[0,M]$ 上单调增加，故由(5-1)、(5-2)式确定的分别是积分 $\int_0^M x\mathrm{d}x$ 的下积分和与上积分和。输入以下 Mathematica 语句，分别计算 M=1,2,4,8,10 时的上积分和与下积分和所得结果如表 5-3。

```
Clear[f, x];n = 1; k = 50000; a = 0; f[x_] = x^n;
For[M = 1, M < 11, M++, b = M; s = NSum[f[a + (b - a)*i/k]*(b - a)/k, {i, 1, k}];
  s1 = NSum[f[a + (b - a)*(i - 1)/k]*(b - a)/k, {i, 1, k}];   e = Abs[s - s1];
  Print[M, "        ", s, "        ", s1, "        ", e, "        ", N[(s + s1)/2]]]
```

表 5-3 $\int_0^M x\mathrm{d}x$ 的近似值

M	$\bar{S}$	$\underline{S}$	$\lvert\bar{S}-\underline{S}\rvert$	积分近似值 $\frac{\bar{S}+\underline{S}}{2}$
1	0.50001	0.49999	0.00002	0.5
2	2.00004	1.99996	0.00008	2.0
4	8.00016	7.99984	0.00032	8.
8	32.0006	31.9994	0.00128	32.
10	50.001	49.999	0.002	50.

由上面的结果知道，若用上积分和与下积分和的均值 $\dfrac{\bar{S}+\underline{S}}{2}$ 作为定积分的近似值，结果将更合理。

我们知道，$\dfrac{\bar{S}+\underline{S}}{2}$ 依赖于 M 值，换而言之，积分值为 M 的函数，若将第一列的 M 值平方，会得到 1，4，16，64，100，这些值刚好是最后一列相应数的两倍，也即最后一列数与第一列数之间的近似满足 $y=F(x)=\dfrac{1}{2}x^2$。

练习 3 当 M 为一般的实数时，近似计算定积分 $\int_0^M x\mathrm{d}x$，并验证近似值与 M 之间是否满足函数关系 $y=F(x)=\dfrac{1}{2}x^2$。

练习 4 用积分和近似计算定积分 $\int_0^M x^n\mathrm{d}x$（n 为自然数），将结果填入表 5-4 中，并寻找近似值与参数 M，n 之间的函数关系。

表 5-4 $\int_0^M x^n\mathrm{d}x$ 的近似值

M	n						近似值与 n 的关系
	1	2	3	4	5	6	
-3							
-2							
-1							$\frac{1}{n+1}$
1							
2							
3							
近似值与 M 的关系	$\frac{M^2}{2}$						

练习 5 用积分和近似计算定积分 $\int_1^2 x^n\mathrm{d}x$，将计算结果填入表 5-5 中，并寻找积分值与 n 之间的关系。

表 5-5 $\int_1^2 x^n \mathrm{d}x$ 的近似值

n	-3	-2	0	1	2	3	近似值与 n 的关系
积分值 误差							

实验 5 画出变上限函数 $f_1(x)=\int_0^x t\cdot \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 及函数 $f_2(x)=x\mathrm{e}^{x^2}$ 的图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，所得图形如图 5-2。

```
f1[x_] := Integrate[t*Exp[t^2], {t, 0, x}]; f2[x_] := x*Exp[x^2];
g1 = Plot[f1[x], {x, 0, 3}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]];
g2 = Plot[f2[x], {x, 0, 3}, PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1]];Show[g1, g2];
```

实验 6 画出变上限函数 $\int_0^x t\sin t^2\mathrm{d}t$ 及其导函数的图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，所得图形如图 5-3。

```
f1[x_] := Integrate[t*Sin[t^2], {t, 0, x}];f2[x_] := Evaluate[D[f1[x], x]];
g1 = Plot[f1[x], {x, 0, 3}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]];
g2 = Plot[f2[x], {x, 0, 3}, PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1]];Show[g1, g2];
```

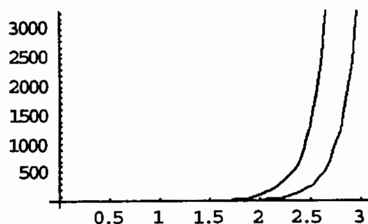


图 5-2

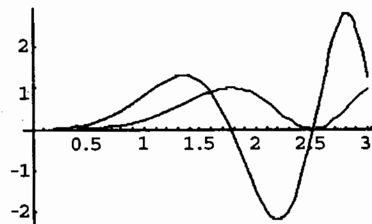


图 5-3

5.2 定积分近似计算的梯形法

在数值计算中，称用（5-1）式与（5-2）式近似定积分的方法为矩形法，这是因为这两个式子在几何上表示一些矩形面积的和。在近似计算中也常用式子（将在实验二十六中作进一步的研究）

$$\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n})\right)\cdot\frac{b-a}{n} \tag{5-3}$$

来求定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，该式是 $\left(\sum_{i=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}(i-1)\right)\frac{b-a}{n}$ 和 $\left(\sum_{i=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}$ 的平均，它在几何上表示一些梯形面积的和，称为梯形法。

实验 7 用梯形法近似计算定积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$。

解：$f(x)=\mathrm{e}^x$ 在[0, 1]上连续，所以定积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ 存在。现将区间[0,1]n 等分，由梯形公式（5-3）有

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \approx \frac{1}{2n}(1+\mathrm{e}+2\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{i}{n}}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}\right)$$

利用此式，输入以下 Mathematica 语句：

```
f[x_] := Exp[x]; a = 0; b = 1;s0 = 1.; s1 = 0; n = 20; m = 6;
While[Abs[s0 - s1] > 10^-m, s1 = s0;
    s0 = N[Sum[f[a + i*(b - a)/n]*(b - a)/n, {i, 0, n - 1}] +
            Sum[f[a + i*(b - a)/n]*(b - a)/n, {i, 1, n}]]/2.;
    n = n*2;];  Print[f[x], "在区间["a,",",b"]上的积分近似值为", s0]
```

运行结果为 1.71828。

练习 6 提高计算精度，根据结果归纳定积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ 与 e 之间的关系。

练习 7 用梯形法近似计算定积分 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$，并分析结果与 π 的关系？

5.3 定积分的应用

实验 8 （平面曲线所围成图形的面积）设 $f(x)=\mathrm{e}^{-(x-2)^2\cos \pi x}$ 和 $g(x)=4\cos(x-2)$。计算区间[0,4]上两曲线所围成的平面图形的面积。

解：输入以下 Mathematica 语句，所围成的图形如图 5-4。

```
Clear[f, g];f[x_] = Exp[-(x - 2)^2 Cos[Pi x]];g[x_] = 4 Cos[x - 2];
Plot[{f[x], g[x]}, {x, 0, 4}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}];
FindRoot[f[x] == g[x], {x, 1.06}]
FindRoot[f[x] == g[x], {x, 2.93}]
NIntegrate[g[x] - f[x], {x, 1.06258, 2.93742}]
```

所得面积为 $s=4.17413$。

练习 8 设 $f(x)=\frac{3}{10}x^5-3x^4+11x^3-18x^2+12x+1$ 和 $g(x)=-4x^3+28x^2-56x+32$，计算两曲线所围成的平面图形的面积。

实验 9 （平面曲线的弧长）设 $f(x)=\sin(x+x\sin x)$，计算 $(0, f(0))$ 与 $(2\pi, f(2\pi))$ 两点间曲线的弧长。

解：在区间 $[0,2\pi]$ 上作出曲线的图形如图 5-5。利用公式 $S=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x$，输入以下 Mathematica 语句，得曲线的弧长为 12.0564。

```
Clear[f];f[x_] = Sin[x + x*Sin[x]];Plot[f[x], {x, 0, 2Pi}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]];
NIntegrate[Sqrt[1 + f'[x]^2], {x, 0, 2 Pi}]
```

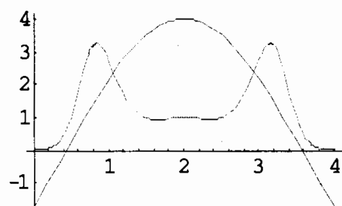


图 5-4

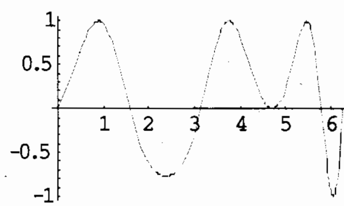


图 5-5

练习 9 设 $f(x)=\sin(\pi\sin(x-2)^2)$，计算曲线 $f(x)$ 在区间[4, 5]上的弧长。

实验 10 (旋转体的体积)计算由 $f(x)=x\sin^2 x$ 和 $x=0$, $x=\pi$ 所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转所得立体的体积。

解：（1）绕 x 轴旋转所得旋转体体积 $V_x=\int_0^{\pi}\pi\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}x$；

（2）绕 y 轴旋转所得旋转体体积 $V_y=\int_0^{\pi}2\pi x f(x)\mathrm{d}x$。

输入以下 Mathematica 语句：

```
Clear[f];f[x_] = x^2*Sin[x];Plot[f[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]];
Integrate[Pi*f[x]^2, {x, 0, Pi}]
Integrate[2*Pi*x*f[x], {x, 0, Pi}]
```

得 $V_x\approx 54.8366$， $V_y\approx 76.3829$。

练习 10 计算由 $f(x)=\mathrm{e}^{-(x-3)^2\cos 4(x-3)}$ 和 $x=1$, $x=5$, $y=0$ 所围成的图形围绕 x 轴旋转所得立体的体积。

附 Mathematica 程序

1. 实验 2 的程序

```
Clear[i, n, a, b];Clear[f, c, d, x, s];
regularpartition[a_, b_, n_] := P = Block[{i}, Table[N[a + (b - a) i/n], {i, 0, n}]];
randompartition[a_, b_, n_] :=
    P = Union[Table[Random[Real, {N[a], N[b]}], {n - 1}], {N[a], N[b]}];
s[f_, c_, d_, x_, choice_:1] := If[c <= x <= d, f[(1 - choice)*c + choice*d], 0];
riemann[f_, a_, b_, n_, choice_:1] := N[(b - a)* Sum[f[(1 - choice)*(a + (i - 1)*(b - a)/n) +
                                        choice*(a + i*(b - a)/n)], {i, 1, n}]/n];
arbitraryriemann[f_, P_, choice_:1] := Block[{i},
              Sum[(Union[N[P]][[i + 1]] - Union[N[P]][[i]])*
    f[(1 - choice)*Union[N[P]][[i]] + choice*Union[N[P]][[i + 1]]], {i, 1, Length[P] - 1}]];
er[f_, a_, b_, n_, choice_:1] :=
      Abs[NIntegrate[f[x], {x, a, b}] - riemann[f, a, b, b, choice]];
ear[f_, P_, choice_:1] := Block[{x},
    Abs[NIntegrate[f[x], {x, Min[N[P]], Max[N[P]]}] - arbitraryriemann[f, P, choice]]];
```

```
viewapprox[f_, P_, choice_:1] := (
        one = Block[{x}, Plot[f[x], {x, Min[N[P]] - 0.1, Max[N[P]] + 0.1},
                DisplayFunction -> Identity]];
        two = Block[{i, x}, Plot[Release[Table[s[f, Union[N[P]][[i]], Union[N[P]][[i + 1]], x,
choice], {i, Length[P] - 1}]], {x, Min[N[P]] - 0.1, Max[N[P]] + 0.1}, PlotRange -> All, PlotPoints
-> 50, DisplayFunction -> Identity]];
    Block[{x}, Show[two, one, PlotLabel ->
        ToString[Length[P] - 1] <> "分划 最大分划" <> ToString[N[norm[P]]] <>
If[Chop[ear[f, P, choice]] == 0, "无误差", "误差" <> ToString[ear[f, P, choice]]], PlotRange ->
                    All, DisplayFunction -> $DisplayFunction]]);
Do[viewapprox[Sin, regularpartition[0, Pi, 2^n], 0.5], {n, 2, 6}];
viewapprox[Sin, randompartition[0, Pi, 16], 1];
Do[viewapprox[ArcTan, randompartition[0, Pi, 2^n], 1], {n, 2, 6}];
```

2. 实验 3 的程序

```
Clear[f, x, a, b];f[x_] := Sin[x];a = 0; b = Pi/2; n = 0;
g = Plot[f[x], {x, a, b}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], DisplayFunction -> Identity];
For[j = 3, j <= 100, j *= 2; n = j; tt1 = {}; tt2 = {}; supper = 0; slower = 0;
    For[i = 0, i < n, i++, x1 = a + (b - a)*i/n; x2 = x1 + (b - a)/n;
      supper = supper + f[x2]/n; slower = slower + f[x1]/n;
      tt1 = Append[tt1,Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Rectangle[{x1, 0}, {x2, f[x2]}]}]];
      tt2 = Append[tt2, Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Rectangle[{x1, f[x1]}, {x2, 0}]}]]];
    Print["    "];
    Show[g, tt1, tt2, DisplayFunction -> $DisplayFunction,
      PlotLabel -> (n - 1)"的分割点的图示"];
    Print["此时有：上和-下和＝", supper - slower];
    Print["求得的积分近似值为", (supper + slower)/2.]; ]
Clear[f, x, a, b];f[x_] := 3*x^2;a = 0; b = 1; n = 500;
For[j = 10, j <= 1000, j *= 2; n = j; supper = 0; slower = 0;
    For[i = 0, i < n, i++, x1 = a + (b - a)*i/n; x2 = x1 + (b - a)/n;
    supper = supper + f[x2]/n; slower = slower + f[x1]/n;];
        Print["子区间数 n=", n, "时，积分近似值为", (supper + slower)/2., "上和-下和=",
N[supper - slower]];]
```

实验六　空间曲线与曲面的绘制

本实验的目的是进一步观察空间曲线和空间曲面图形的特点。

6.1　空间曲线的绘制

绘制空间曲线一般使用曲线的参数方程。

画参数曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ ， $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$ 所确定的空间曲线的 Mathematica 命令为

ParametricPlot3D[{x[t],y[t],z[t]},{t,tmin,tmax},选项]。

实验 1　绘制参数曲线 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = 2\cos t \\ z = t/2 \end{cases}$ 的图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到图形如图 6-1。

```
ParametricPlot3D[{Sin[t], 2 Cos[t], t/2}, {t, 0, 12}];
```

练习 1　绘制参数曲线 $\begin{cases} x = t/5 \\ y = \cos t \\ z = \sin t \end{cases}$ 的图形。

实验 2　绘制参数曲线 $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \dfrac{1}{1+2t} \\ z = \arctan t \end{cases}$ 的图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到图形如图 6-2。

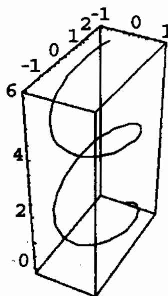


图 6-1

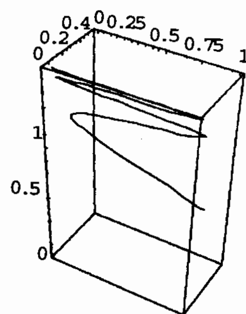


图 6-2

```
ParametricPlot3D[{ Cos[t]^2, 1/(1 + 2*t), ArcTan[t]}, {t, 0, 8}];
```

练习 2 绘制环面螺线$\begin{cases} x=(4+\sin 20t)\cos t \\ y=(4+\sin 20t)\sin t \\ z=\cos 20t \end{cases}$的图形，并观察图形的特征。

练习 3 绘制三叶线$\begin{cases} x=(2+\cos\frac{3}{2}t)\cos t \\ y=(2+\cos\frac{3}{2}t)\sin t \\ z=\sin\frac{3}{2}t \end{cases}$的图形，并观察图形的特征。

6.2 空间曲面的绘制

作一般式方程 $z=f(x,y)$ 所确定的曲面图形的 Mathematica 命令为

Plot3D[f[x,y],{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax},选项]

作参数曲面$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$，$u\in[u_{\min},u_{\max}]$，$v\in[v_{\min},v_{\max}]$所确定的曲面图形的 Mathematica 命令为

ParametricPlot3D[{x[u,v],y[u,v],z[u,v]},{u,umin,umax},{v,vmin,vmax},选项]

绘制三维图形（空间曲线、空间曲面）常用的选项见表 6-1。

表 6-1

选　项	默 认 值	说　明
Axes	True	是否画坐标轴
AxesLabel	None	是否在坐标轴上加标注
Boxed	True	绘制外框，定义 False 则不绘制外框
Mesh	True	是否在图形表面加上网格线
PlotRange	Automatic	Z 方向的绘图范围
Shading	True	表面不上色
ViewPoint	{1.3,-2.4,2}	观测点
PlotPoints	15	在 x 和 y 方向取样点

实验 3 画出函数 $z=\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})$ 的图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，图形如图 6-3。

```
Plot3D[Sin[Pi*Sqrt[x^2 + y^2]], {x, -1, 1}, {y, -1, 1},
        PlotPoints -> 30, Lighting -> True];
```

实验 4 画出函数 $z=-xye^{-x^2-y^2}$ 的图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，图形如图 6-4。

```
Plot3D[-x*y*Exp[-x^2 - y^2], {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, PlotPoints -> 30,
       AspectRatio -> Automatic];
```

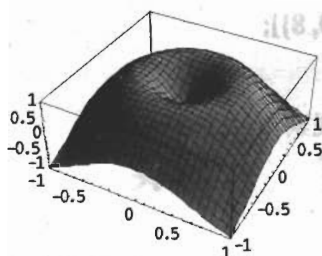


图 6-3

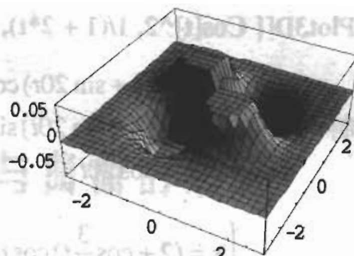


图 6-4

练习 4 画出函数 $z=\sin x\cos y$ 的图形，并观察图形的特征。

练习 5 画出函数 $z=\dfrac{\sin x\sin y}{xy}$ 的图形，并观察图形的特征。

练习 6 画出函数 $z=y^2+xy$ 的图形，并观察图形的特征。

实验 5 已知球面参数方程 $\begin{cases}x=\sin v\cos u\\ y=\sin v\sin u\\ z=\cos v\end{cases}$，画出其图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，图形如图 6-5。

```
ParametricPlot3D[{Sin[v]* Cos[u], Sin[v]* Sin[u], Cos[v]}, {u, 0, 2*Pi}, {v, 0, Pi}];
```

实验 6 画出圆环 $\begin{cases}x=(8+3\cos v)\cos u\\ y=(8+3\cos v)\sin u\\ z=7\sin v\end{cases}$，$u\in\left[0,\dfrac{3}{2}\pi\right], v\in\left[\dfrac{\pi}{2},2\pi\right]$ 的图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，图形如图 6-6。

```
ParametricPlot3D[{(8 + 3*Cos[v])* Cos[u], (8 + 3*Cos[v])* Sin[u],
        7*Sin[v]}, {u, 0, 3*Pi/2}, {v, Pi/2, 2*Pi}];
```

实验 7 画出参数曲面 $\begin{cases}x=\cos u\sin v\\ y=\sin u\sin v\\ z=\cos v+\ln(\tan v/2+u/5)\end{cases}$，$u\in[0,4\pi], v\in[0.001,2]$ 的图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，图形如图 6-7。

```
ParametricPlot3D[{ Cos[u]*Sin[v], Sin[u]Sin[v], Cos[v] + Log[Tan[v/2] + u/5]},
              {u, 0, 4*Pi}, {v, 0.001, 2}];
```

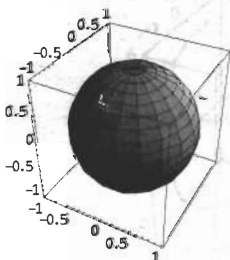


图 6-5

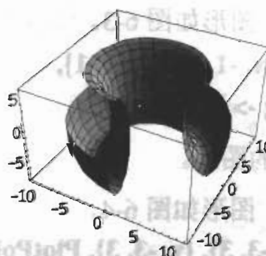


图 6-6

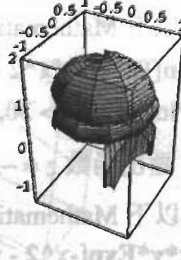


图 6-7

练习 7 任意选取一组(a,b,c,n)，画出参数曲面

$$\begin{cases} x=a(1-k)\cos nv(1+\cos u)+c\cdot\cos nv \\ y=a(1-k)\sin nv(1+\cos u)+c\cdot\sin v \\ z=bk+a(1-k)\sin v \end{cases},\quad k=\frac{v}{2\pi}$$

的图形，并观察图形的特征。

练习 8 画出参数曲面$\begin{cases} x=cht\cos\varphi \\ y=cht\sin\varphi \\ z=2t \end{cases}$的图形，并观察图形的特征。

练习 9 画部分球面的图形。设球面参数方程为

$$\begin{cases} x=\sin v\cos u \\ y=\sin v\sin u \\ z=\cos v \end{cases},\quad u\in[0,2\pi], v\in[0,\pi]$$

(1) 画出$\frac{3}{4}$球面；

(2) 画出上半球面的$\frac{3}{4}$部分。

6.3 空间图形的叠加

实验8 画出以平面曲线 y=cos$x$ 为准线，母线平行 Z 轴的柱面的图形。

解：写出这一曲面的参数方程为

$$\begin{cases} x=t \\ y=\cos t \\ z=s \end{cases},\quad t\in[-\pi,\pi], s\in R$$

取参数 s 的范围为[0,8]。输入以下 Mathematica 语句，图形如图 6-8。

ParametricPlot3D[{ t, Cos[t], s}, {t, -Pi, Pi}, {s, 0, 8}];

实验9 画出由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与上半球面 $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 相交所围成的几何体的图形。

解：这是一个组合图形。一般地，直接画出两者的图形组合在一起即可得到所画几何体的图形。但是，这里所要的图形仅仅是两个曲面图形的一部分，因此需要有选择地画出两曲面的相应部分组合在一起。由于它们的交线在平面 z=1 上，方程为 $x^2+y^2=1$，从而在平面 z=1 上的参数方程为

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases},\quad 0\leqslant t\leqslant\pi$$

相应的曲面部分的参数方程分别为$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \\ z=r^2 \end{cases}$，$t\in[0,\pi], r\in[0,1]$与$\begin{cases} x=\sin r\cos t \\ y=\sin r\sin t \\ z=1+\cos r \end{cases}$，

$t\in[0,\pi], r\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$。输入以下 Mathematica 语句，图形如图 6-9。

```
t1 = ParametricPlot3D[{ Cos[u]*Sin[v], Sin[u]Sin[v], Cos[v]}, {u, 0, 2*Pi}, {v, 0, Pi/2},
                      PlotPoints -> 30];
t2 = ParametricPlot3D[{ (Cos[u] + 1)/2, Sin[u]/2, v}, {u, 0, 2*Pi}, {v, 0, 1.1},
                      PlotPoints -> 30];
Show[t1, t2];
```

实验 10 画出曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，$x^2+y^2=x$ 及 xOy 面所围成的立体图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，图形如图 6-10。

```
g1 = ParametricPlot3D[{ r*Cos[t], r*Sin[t], r^2}, {t, 0, 2*Pi}, {r, 0, 1},
                      PlotPoints -> 30];
g2 = ParametricPlot3D[{ Cos[t]*Sin[r], Sin[t]Sin[r], Cos[r] + 1}, {t, 0, 2*Pi}, {r, 0, Pi/2},
                      PlotPoints -> 30];
Show[g1, g2];
```

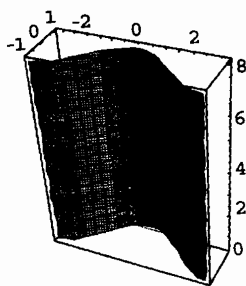


图 6-8

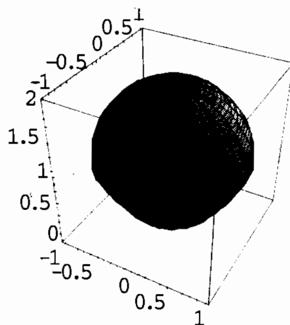


图 6-9

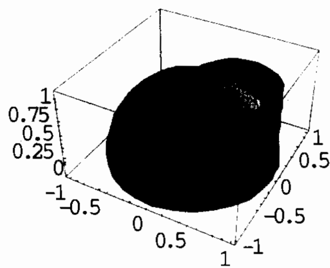


图 6-10

练习 10 画出曲面 $z=x^2+y^2$ 和 $z=1-y^2(|x|\leqslant 1.2,|y|\leqslant 1.2)$，观察这两个曲面的交线，并证明此交线在 xOy 面上的投影是一个椭圆。

由三维曲线的参数方程直接去掉其中一个表达式，可以得到曲线在另外两个变量的对应轴所确定坐标面上的正投影曲线的参数方程；由一般方程可以通过消去一个变量而得到另外两个变量的对应轴所确定坐标面上的正投影曲线的一般方程。

实验 11 画出螺旋线 $\begin{cases}x=10\cos t\\ y=10\sin t\\ z=2t\end{cases}$，$t\in R$ 在 xOz 面上的正投影曲线的图形。

解：所给螺旋线在 xOz 面上的投影曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=10\cos t\\ z=2z\end{cases}$，输入以下 Mathematica 语句，图形如图 6-11。

```
ParametricPlot[{2t, 10 Cos[t]}, {t, -2Pi, 2Pi}];
```

将表示曲线的方程组，消去其中一个变量，即得到曲线在相应于这一变量方向上的正投影曲线的方程，不考虑曲线所在平面，它就是投影柱面方程；对于参数方程，只要注意将方程中并不存在的那个变元看成第二个参数而添加第三个方程即可。

实验 12 求实验 11 中螺旋线相对于 xOy 面的投影柱面。

解：投影柱面的方程为 $\begin{cases} x=10\cos t \\ y=10\sin t \\ z=s \end{cases}$，输入以下 Mathematica 语句，得投影柱面的图形如图 6-12。

```
g1 = ParametricPlot3D[{10Cos[t], 10Sin[t], 2t}, {t, 0, 2Pi}];
g2 = ParametricPlot3D[{10Cos[t], 10Sin[t], s}, {t, 0, 2Pi}, {s, 0, 5}];
Show[g1, g2];
```

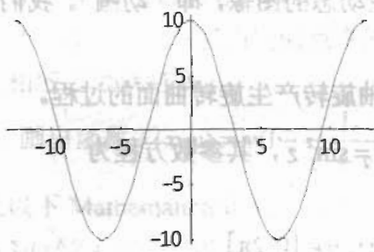


图 6-11

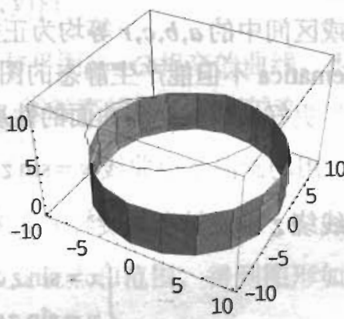


图 6-12

练习 11　求曲线 $\begin{cases} z=2x^2+3y^2 \\ 3x^2+5y^2+7z^2=9 \end{cases}$ 相应于 xOy 面的投影柱面方程。

6.4　常见二次曲面的参数方程

椭球面 $\begin{cases} x=a\sin u\sin v \\ y=b\sin u\cos v \\ z=c\cos u \end{cases}$，$u\in[0,\pi], v\in[0,2\pi]$

椭圆抛物面（部分）$\begin{cases} x=au\sin v \\ y=bu\cos v \\ z=u^2 \end{cases}$，$u\in[0,r], v\in[0,2\pi]$

双曲抛物面（部分）$\begin{cases} x=y \\ y=v \\ z=\dfrac{2}{5}(u^2-v^2) \end{cases}$，$u\in[-4,4], v\in[4,-4]$

单叶双曲面（部分）$\begin{cases} x = a\sec u\sin v \\ y = b\sec u\cos v \\ z = c\tan u \end{cases}$ ，$u\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right], v\in[0,2\pi]$

双叶双曲面（部分）$\begin{cases} x = a\sqrt{u^2-1}\sin v \\ y = b\sqrt{u^2-1}\cos v \\ z = cu \end{cases}$ ，$|u|\in[1,5], v\in[0,2\pi]$

圆锥面（部分）$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u \end{cases}$ ，$u\in[-a.a], v\in[0,2\pi]$

以上各式或区间中的 a,b,c,r 等均为正数，请读者选择不同的值作出它们的图形。

Mathematica 不但能产生静态的图像，而且能产生动态的图像，即"动画"。我们可以借助于"动画"更好地研究空间曲面的性质。

实验 13 用动画演示由曲线 $y=\sin z, z\in[0,\pi]$ 绕 z 轴旋转产生旋转曲面的过程。

解：该曲线绕 z 轴旋转所得旋转曲面的方程为 $x^2+y^2=\sin^2 z$，其参数方程为

$$\begin{cases} x = \sin z\cos u \\ y = \sin z\sin u \\ z = z \end{cases} ,\quad z\in[0,\pi], u\in[0,2\pi]$$

输入以下 Mathematica 语句，即可得到连续变化的 30 幅图形。

```
For[i = 1, i <= 30, i++,
  ParametricPlot3D[{Sin[z]*Cos[u], Sin[z]*Sin[u], z}, {z, 0, Pi}, {u, 0, 2*Pi*i/30},
        AspectRatio -> 1, AxesLabel -> {"X", "Y", "Z"}]]
```

实验 14 **将一张薄膜贴在 $x=0, x=1, y=0, y=1$ 的方框上，薄膜振动的函数**取为

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4}\frac{16}{m^2n^2\pi^2}(1+\cos n\pi)(1-\cos m\pi)\sin(n\pi x)\sin(m\pi y)\cdot\cos(\sqrt{m^2+n^2}\pi t)$$

其中 t 为参数，作出图形随 t 的变动而引起薄膜振动的动画。

解：初始位置是 $u(x,y,0)$。**通过 t 的不同值得到多幅画面，然后将这些图形连续地一张张显示**出来，即可达到运动的动画效果。请读者自己上机输入以下 Mathematica 语句实践。

```
<< Graphics`Animation`;Clear[x, y, t, m, n];
u[x_, y_, t_] :=
  Sum[16*(1 + Cos[n*Pi])*(1 - Cos[m*Pi])*Sin[n*Pi*x]*Sin[m*Pi*y]*
     Cos[Sqrt[m^2 + n^2]*Pi*t]/(m^2*n^2*Pi^2), {m, 1, 4}, {n, 1, 4}]
Animate[Plot3D[u[x, y, t], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, PlotRange -> {-8, 8}], {t, 0, 1.75, 0.25}]
```

练习 12 观察二次曲面族 $z=x^2+y^2+kxy$ 的图形。特别注意确定 k 的这样一些值，当 k 经过这些值时，曲面从一种类型变成了另一种类型。

实验七　多元函数微分学

本实验的目的是将二元函数可视化，利用其图形来进一步理解二元函数的代数性质和几何性质，并利用图形进一步理解多元函数的极值。

7.1　二元函数的可视化

二元函数 $f(x,y)$ 的可视化有两种方式：

(1) 在 R^3 中画出它的图形，即点集 $\{(x,y,z)|z=f(x,y)\}$；

(2) 在 R^2 中画出它的等高线图，即曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $z=C$ 相交的曲线，也称为等值线。具有以下特点：①高度相同的点在同一条等高线上；②等高线图上亮度越高的地方，所对应的曲面相应之处就越高。

实验 1　画出函数 $f(x,y)=y(1-\frac{1}{x^2+y^2})$，$(x,y)\neq(0,0)$ 的图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到图形如图 7-1，改变视点和范围，得到图形如图 7-2。

```
f = y*(1 - 1/(x^2 + y^2)); Plot3D[f, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}];
Plot3D[f, {x, -1.5, 1.5}, {y, -1.5, 1.5}, PlotPoints -> 35,
    AxesLabel -> {"x", "y", "z"}, ViewPoint -> {2, 0, 2}, PlotRange -> {-5, 5}];
```

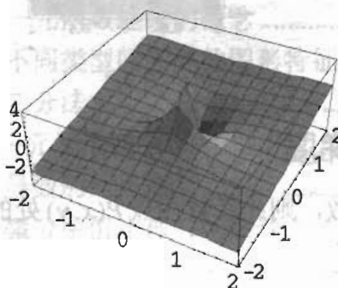


图 7-1

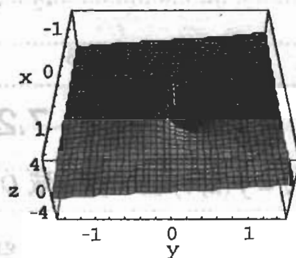


图 7-2

实验 2　画出函数 $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ 的等高线图，并观察当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限情况。

解：输入以下 Mathematica 语句，画出 $f(x,y)$ 及其等高线图如图 7-3。

```
Clear[f];f[x_, y_] = x y/(x^2 + y^2);
p1 = Plot3D[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints -> 30, DisplayFunction -> Identity];
c1 = ContourPlot[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, ContourShading -> False, Axes ->
    Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotPoints -> 60, DisplayFunction -> Identity];
Show[GraphicsArray[{p1, c1}]]; pts = Table[Random[Real, {-0.1, 0.1}], {i, 1, 10}, {2}]
g[{x_, y_}] = {x, y, f[x, y]};
```

```
TableForm[Map[g, pts], TableHeadings -> {None, {"    x", "      y", "    f[x,y]"}}]
```

从图 7-3 中可以看出 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在。

练习 1 画出下列二元函数的图形以及它们的等高线图。

(a) $f(x,y)=-xye^{-x^2-y^2}$　　(b) $f(x,y)=\dfrac{-3y}{x^2+y^2+1}$

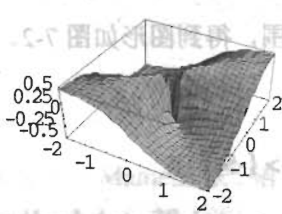
(c) $f(x,y)=\sin xy$　　(d) $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$

实验 3 观察 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}$ 的极限。

解：输入以下 Mathematica 语句，画出等值线图形如图 7-4。

```
f[x_, y_] = 2*x^3/(x^2 + y^2); cont = {-0.8, -0.4, -0.2, -0.1, -0.05, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8};
ContourPlot[f[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, Contours -> cont,
        PlotPoints -> 50, ColorFunction -> Hue];
Print["f[x,y] = ", f[x, y]]; Print[""]; Print[f[x, y] == c, "   where"];Print["c = ", cont]
```

由图 7-4 可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}=0$。



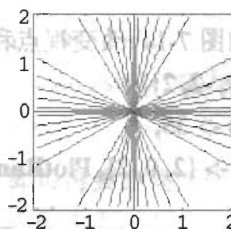


图 7-3

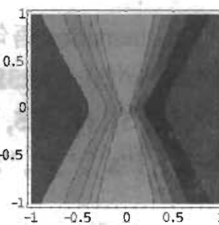


图 7-4

7.2 二元函数的梯度

设函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 内有一阶连续偏导数，则此函数在点 $P(x,y)$ 处的梯度为

$$\text{grad}\, f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j$$

沿梯度方向的方向导数达到最大值，及梯度方向是函数 $f(x,y)$ 在这点增长最快的方向。梯度方向与等高线的法线方向相同。

设 L 为一平面曲线，如果 L 上任意一点处的切线与函数 $z=f(x,y)$ 在该点处的梯度位于同一直线上，则称 L 为 $z=f(x,y)$ 的梯度线。

可以以等长的折线段来模拟函数的梯度线。设步长为 t，从点 $P_0(x_0,y_0)$ 出发，沿梯度方向前进 t 得到点 $P_1(x_1,y_1)$，即

$$\begin{cases}x_1=x_0+f_x(x_0,y_0)\cdot t\\ y_1=y_0+f_y(x_0,y_0)\cdot t\end{cases}$$

再从点 $P_1(x_1,y_1)$ 出发，沿着梯度方向前进 t 得到点 $P_2(x_2,y_2)$，依次得到一系列点，连接这些点，

即可得到梯度线的图形。

实验 4 作出函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2+2y^2)/10^4}$ 的等高线和梯度线的图形，并观察梯度线与等高线的关系。

解：(1) 定义函数，并作出函数 $f(x,y)$ 的图形，输入以下 Mathematica 语句

```
f[x_, y_] = E^(-(x^2 + 2 y^2)/10^4);Plot3D[f[x, y], {x, -1.2, 1.2}, {y, -1.2, 1.2}];
```

结果如图 7-5。

(2) 绘制等高线，输入以下 Mathematica 语句，结果如图 7-6。

```
t1 = ContourPlot[f[x, y], {x, -1.2, 1.2}, {y, -1.2, 1.2}, PlotPoints -> 50,
        ContourShading -> False];
```

(3) 绘制梯度线。输入以下 Mathematica 语句，结果如图 7-7。

```
fx[x_, y_] = Evaluate[D[f[x, y], x]];fy[x_, y_] = Evaluate[D[f[x, y], y]];
x0 = 1.0; y0 = 1.0; lamda = 0.01; a = x0; b = y0;
Do[u = a + lamda fx[a, b]/Sqrt[(fx[a, b])^2 + (fy[a, b])^2];
  v = b + lamda fy[a, b]/Sqrt[(fx[a, b])^2 + (fy[a, b])^2];
   c[n] = u; d[n] = v; a = u; b = v, {n, 200}]
data = Table[{c[n], d[n]}, {n, 200}];
t2 = ListPlot[data, PlotJoined -> True, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]];
```

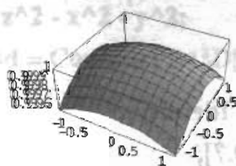


图 7-5

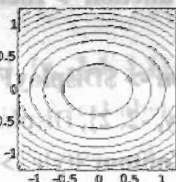


图 7-6

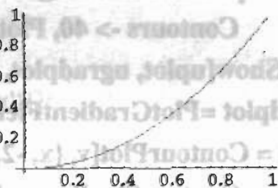


图 7-7

(4) 同时绘制等高线和梯度线。输入以下 Mathematica 语句，结果如图 7-8。

```
Show[t1, t2, AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All];
```

(5) 观察等高线和梯度线的关系，输入以下 Mathematica 语句，结果如图 7-9。

```
<< Calculus`VectorAnalysis`
<< Graphics`PlotField`
SetCoordinates[Cartesian[x, y, z]];u = E^(-(x^2 + 2 y^2)/10^4);
conplot = Show[t1, DisplayFunction -> Identity];
gradplot = Show[t2, DisplayFunction -> Identity];
t = PlotGradientField[u, {x, -1.2, 1.2}, {y, -1.2, 1.2}, DisplayFunction -> Identity];
Show[conplot, gradplot, t, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

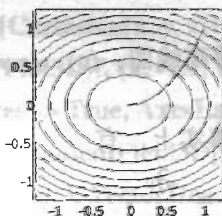


图 7-8

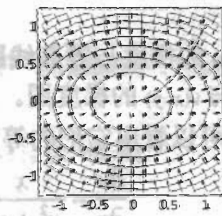


图 7-9

练习 2 设 $f(x,y)=x^3+x^2y^3-2y^2$，求出 f_x，f_y，f_{xy} f_{xx}，f_{yy}，并作出函数的图形，从图上观察偏导数的几何意义。

练习 3 作出函数 $z=x^2-y^2$ 的等高线和梯度线。

实验 5 在同一坐标面上作出 $u(x,y)=x(1+\dfrac{1}{x^2+y^2})$ 和 $v(x,y)=y(1-\dfrac{1}{x^2+y^2})$，$x>0$ 的等高线图，并给出它们之间的关系。

解：输入以下 Mathematica 语句，作出它们的图形如图 7-10。

```
<< Calculus`VectorAnalysis`
<< Graphics`PlotField`
SetCoordinates[Cartesian[x, y, z]];
check[u_, v_] := {Grad[u][[1]] - Grad[v][[2]], Grad[v][[1]] + Grad[u][[2]]}
u = x(1 + 1/(x^2 + y^2)); v = y(1 - 1/(x^2 + y^2));
check[u, v] // Simplify
ugradplot = PlotGradientField[u, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, DisplayFunction -> Identity];
uplot = ContourPlot[u, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, ContourStyle -> GrayLevel[0],
        ContourShading -> False, DisplayFunction -> Identity,
        Contours -> 40, PlotPoints -> 40];
g1 = Show[uplot, ugradplot, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
vgradplot =PlotGradientField[v, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, DisplayFunction -> Identity];
vplot = ContourPlot[v, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, ContourStyle -> GrayLevel[0.7],
        ContourShading -> False, DisplayFunction -> Identity,
      Contours -> 40, PlotPoints -> 40];
g2 = Show[vplot, vgradplot, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
g3 = Show[uplot, vplot, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
g4 = Show[ugradplot, vgradplot, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

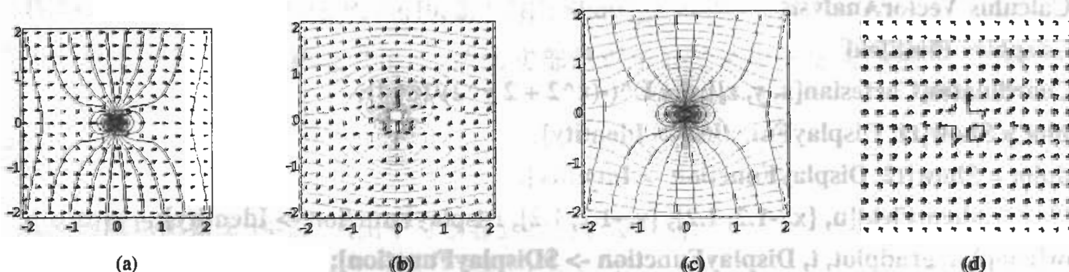


图 7-10

其中(a) $u(x,y)$ 的梯度与等高线图；(b) $v(x,y)$ 的梯度与等高线图；(c) $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 的等高线图；(d) $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 的梯度图。

从图 7-10 中可以看出它们的等高线是一族正交曲线。事实上，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}\ ,$$

且 $\nabla u \cdot \nabla v = 0$，它们满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

练习 4 在同一坐标平面上作出以下函数的等高线图。

(1) $u(x,y)=x^2-y^2$， $v(x,y)=2xy$

(2) $u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$， $v(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$

并观察每一组函数的等高线图有什么特点，试从理论上解释这一现象。

7.3 多元函数

设三元函数 $f(x,y,z)$ 在其定义域内具有一阶连续偏导数，$f(x,y,z)=C$（C 为常数）称为等高面（也称为等值面）。

实验 6 画出函数 $f(x,y,z)=z^2-x^2-y^2$ 的等高面。

解：输入以下 Mathematica 语句，得函数的等高面如图 7-11。

```
<< Graphics`ContourPlot3D`
f = z^2 - x^2 - y^2;
cp3d = ContourPlot3D[f, {x, -1.1, 1.1}, {y, -1.1, 1.1}, {z, -2, 2},
      Contours -> {1.0}, Axes -> True, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}];
```

类似于二元函数梯度三元函数的梯度定义为

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

函数 $f(x,y,z)$ 在方向 $u=(u_0,u_1,u_2)$ 的方向导数定义为

$$\begin{aligned}D_u f(x_0,y_0,z_0)&=\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot u\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x_0+tu_0\,,\,y_0+tu_1\,,\,z_0+tu_2)\Big|_{t=0}\end{aligned}$$

实验 7 画出函数 $f(x,y,z)=z^2-x^2-y^2$ 的梯度向量。

解：输入以下 Mathematica 语句，得结果如图 7-12。

```
<< Graphics`ContourPlot3D`
<< Graphics`PlotField3D`
<< Calculus`VectorAnalysis`
SetCoordinates[Cartesian[x, y, z]];   f = z^2 - x^2 - y^2;
cp3d = ContourPlot3D[f, {x, -1.1, 1.1}, {y, -1.1, 1.1}, {z, -2, 2}, Contours -> {1.0},
          Axes -> True, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}];
vecplot3d = PlotGradientField3D[f, {x, -1.1, 1.1}, {y, -1.1, 1.1}, {z, -2, 2},
      PlotPoints -> 3, VectorHeads -> True];
Show[vecplot3d, cp3d];
```

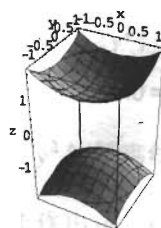


图 7-11

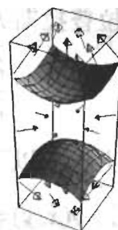


图 7-12

练习 5 画出下列函数的等值面和梯度向量，并观察它们之间的关系，试从理论上说明这一现象。

(1) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $f=1$

(2) $f(x,y,z)=x^3-3xy^2+z$, $f=0$

(3) $f(x,y,z)=xyz$, $f=1$

7.4 曲面的切平面与法线

曲面 $z=f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处的切平面方程为

$$f_x(x_0, y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)\cdot(y-y_0)=Z-Z_0,$$

即 $z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$。

曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-f(x_0,y_0)}{-1}$$

其参数方程形式为

$$\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0+f_y(x_0,y_0)(x-x_0)/f_x(x_0,y_0) \\ z=f(x_0,y_0)-(x-x_0)/f_x(x_0,y_0) \end{cases}$$

实验 8 求出曲面 $z=2x^2+y^2$ 在点(1,1)处的切平面、法线方程，并画出图形。

解：(1) 画出曲面的图形。曲面的参数方程为 $\begin{cases} x=r\sin u/\sqrt{2} \\ y=r\cos u \\ z=r^2 \end{cases}$ $,u\in[0,2\pi],r\in[0,2]$。

输入以下 Mathematica 语句，结果见图 7-13。

```
Clear[f];f[x_, y_] = 2 x^2 + y^2;p1 = Plot3D[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}];
g1 = ParametricPlot3D[{r*Sin[u]/Sqrt[2.], r*Cos[u], r^2}, {u, 0, 2*Pi}, {r, 0, 2}];
```

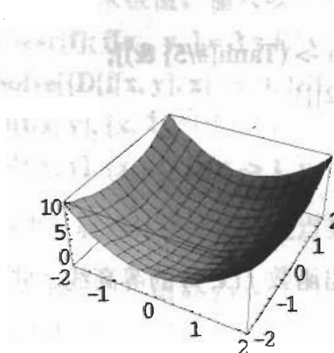
(2) 画出切平面的图形。输入以下 Mathematica 语句：

```
a = D[f[x, y], x] /. {x -> 1, y -> 1};b = D[f[x, y], y] /. {x -> 1, y -> 1};
p[x_, y_] = f[1, 1] + a (x - 1) + b (y - 1); g2 = Plot3D[p[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}];
```

切平面方程为 $2x+y-1=0$，图形如图 17-14。

(3) 画出法线的图形。以下 Mathematica 语句，**图形如图 7-14。**

```
ly[x_] = 1 + b (x - 1)/a; lz[x_] = f[1, 1] - (x - 1)/a;
g3 = ParametricPlot3D[{x, ly[x], lz[x]}, {x, -2, 2}];
Show[p1, g2, g3, AspectRatio -> Automatic, ViewPoint -> {-2.530, -1.025, 2.000}];
```



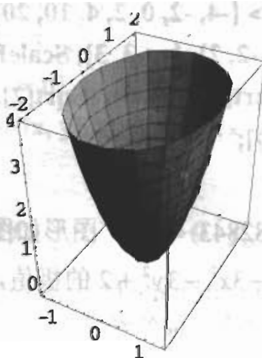


图 7-13

图 7-14

练习 6　画出下列曲面、曲面在指定点处的切平面和法线的图形。

(1) $z=2x^2+y^2$，**点(1,1,3)**

(2) $xyz=6$，点(1,2,3)

(3) $z=x^3+2xy$，点(1,2,5)

7.5　多元函数的极值

本节主要考虑多元函数的极值问题。

7.5.1　无条件极值

具有二阶连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$ 的极值求法为：

(1) 解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$，**求得一切实数解，即可求得一切驻点。**

(2) 对每一个驻点 (x_0,y_0)，求得二阶偏导数，

$$A=f_{xx}(x_0,y_0),\quad B=f_{xy}(x_0,y_0),\quad C=f_{yy}(x_0,y_0)$$

(3) 对每一个驻点 (x_0,y_0)，计算判别式 $AC-B^2$ 的值。

① $AC-B^2>0$，若 $A>0$，$f(x_0,y_0)$ 为极小值；$A<0$，则 $f(x_0,y_0)$ **为极大值；**

② $AC-B^2=0$ **失效；**

③ $AC-B^2<0$，$f(x_0,y_0)$ **不是极值点，称为鞍点。**

以下以二元函数为例进行实验。

实验 9　求出函数 $f(x,y)=x^4-4xy+y^2$ 的极值，并画出函数 $f(x,y)$ 的等高线、驻点以及

$-f(x,y)$ 的梯度向量的图形。

解：输入以下 Mathematica 语句：

```
<< Graphics`PlotField`
f = x^4 - 4 x y + y^2;FindMinimum[f, {x, 1}, {y, 1}]
conplot = ContourPlot[f, {x, -2, 2}, {y, -3, 3}, ContourShading -> False,
    PlotPoints -> 100,Contours -> {-4, -2, 0, 2, 4, 10, 20}];
fieldplot = PlotGradientField[-f, {x, -2, 2}, {y, -3, 3}, ScaleFunction -> (Tanh[#/5] &)];
critptplot =ListPlot[{{-Sqrt[2], -2 Sqrt[2]}, {0, 0}, {Sqrt[2], 2Sqrt[2]}},
    PlotStyle -> {PointSize[0.03]}];
Show[conplot, fieldplot, critptplot];
```

得 $f(x,y)$ 的最小值为 $f(1.41421,2.82843)=-4$。图形如图 7-15。

练习 7 求函数 $f(x,y)=3x^2y+y^3-3x^2-3y^2+2$ 的极值，并画出函数 $f(x,y)$ 的等高线、驻点以及 $-f(x,y)$ 的梯度向量的图形，试给出你的结论。

实验 10 设有二元可导函数 $f(x,y)=-(x^2-1)^2-(x^2y-x-1)^2$，证明它仅有两个极大值点而没有极小值点，然后画出 $f(x,y)$ 的图形，从图上观察出现这一现象的原因，并与一元函数的结论相比较。

解：(1) 求极值。输入以下 Mathematica 语句：

```
Clear[f];f[x_, y_] = -(x^2 - 1)^2 - (x^2*y - x - 1)^2;
Solve[{D[f[x, y], x] == 0, D[f[x, y], y] == 0}, {x, y}]
```

得驻点为 $(-1,0)$，$(1,2)$，且 $f(-1,0)=f(1,2)=0$。显然这两点是最大值点，从而这两点必是极大值点。由于函数已没有其它的驻点，因而它也不可能有极小值点。

(2) 作出函数 $f(x,y)$ 及其等值线的图形。输入以下 Mathematica 语句，图形如图 7-16。

```
Plot3D[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -1, 4}, PlotRange -> {-4, 0}, PlotPoints -> 30];
Plot3D[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -1, 4}, PlotRange -> {-4, 0},
    PlotPoints -> 30, ViewPoint -> {2.504, -2.105, 0.867}];
ContourPlot[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -1, 4}, ContourShading -> False,
    Contours -> 30, PlotPoints -> 60];
```

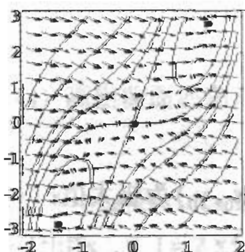
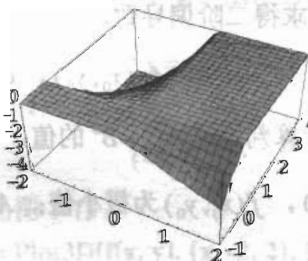


图 7-15



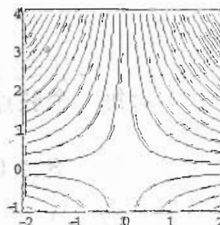


图 7-16

通过这两个最高点作垂直 xOy 面的截面，截立体所得的截线上存在最低点。但这最低点却不是整个图形的局部最低点。

而对一元函数而言，如果有有限个驻点，则在两个极大值点之间必存在极小值点；但这个

结论对二元连续函数不成立。

实验 11 设函数 $f(x,y)=3xe^y-x^3-e^{3y}$，证明它有唯一驻点，且此驻点为极大值点，但此函数无最大值点，然后画出 $f(x,y)$的图形，从图上观察出现这一现象的原因，并与一元函数的结论相比较。

解：(1) 求极值。输入以下 Mathematica 语句：

```
Clear[f]; f[x_, y_] = 3 x E^y - x^3 - E^(3 y);
Solve[{D[f[x, y], x] == 0, D[f[x, y], y] == 0}, {x, y}]
D[f[x, y], {x, 2}]*D[f[x, y], {y, 2}] - (D[f[x, y], x, y])^2 /. {x -> 1, y -> 0}
D[f[x, y], {x, 2}] /. {x -> 1, y -> 0}
```

得唯一驻点(1,0)，在该驻点处有 $f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^{\ 2}=27>0$，$f_{xx}=-b<0$，故该驻点为极大值点。

(2) 作出函数 $f(x,y)$ 的图形，输入以下 Mathematica 语句，图形如图 7-17。

```
Plot3D[f[x, y], {x, -3, 3}, {y, -4, 2}, PlotRange -> {-100, 5},
    PlotPoints -> 30, ViewPoint -> {1.571, -2.901, 0.867}];
Plot3D[f[x, y], {x, -3, 3}, {y, -5, 3}, PlotRange -> {-10, 5},
    PlotPoints -> 40, ViewPoint -> {2.631, -1.943, 0.867}, ClipFill -> None];
```

从图形上可以看出，尽管该函数在(1,0)处有极大值，但它的最大值却不存在。

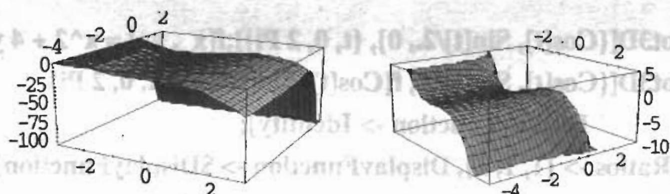


图 7-17

而对一元函数而言，如果有唯一驻点，且该点是极大（小）值点，则此极大（小）值点必是函数的最大（小）值点，但这个结论对二元连续函数不成立。

从以上两个实验可见，由于多元函数自变量变化的复杂性，使多元函数的极值与一元函数的极值出现了不同的现象。

练习 8 设 $f(x,y)=10x^2y-5x^2-4y^2-x^4-2y^4$。

(1) 求出 $f(x,y)$ 的所有驻点，并判断这些驻点是否为极大值点；

(2) 观察函数 $z=f(x,y)$ 的等高线、驻点以及梯度向量的图形，并给出你的结论；

(3) 画出函数 $z=f(x,y)$ 的图形，从图上观察最高点和鞍点的情况。

7.5.2 条件极值

要寻求目标函数 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值问题称为条件极值。求解条件极值的有效方法为拉格朗日乘数法。

设函数 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 具有连续的偏导数，作拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

如果 $x=x_0, y=y_0$ 是方程组 $L_x=0, L_y=0, L_\lambda=0$，即

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

的解，那么点 (x_0,y_0) 是目标函数 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点。

实验 12 求出函数 $f(x,y)=x^2+4y^3$ 在约束条件 $x^2+4y^2=1$ 下的最值。

解：椭圆 $x^2+4y^2=1$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x(t)=\cos t \\ y(t)=\dfrac{1}{2}\sin t \end{cases},0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

$f(x,y)$ 在椭圆 $x^2+4y^2=1$ 上的参数方程为

$$\begin{cases} x(t)=\cos t \\ y(t)=\frac{1}{2}\sin t \\ z(t)==f(\cos t,\frac{1}{2}\sin t) \end{cases}$$

输入以下 Mathematica 语句，分别作出 $f(x,y)=x^2+4y^3$ 和 $\begin{cases} x^2+4y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 的图形如图 7-18。

```
pp1 = ParametricPlot3D[{Cos[t], Sin[t]/2., 0}, {t, 0, 2 Pi}];f[x_, y_] = x^2 + 4 y^3;
pp2 = ParametricPlot3D[{Cos[t], Sin[t]/2., f[Cos[t], Sin[t]/2.]}, {t, 0, 2 Pi},
                    DisplayFunction -> Identity];
Show[pp1, pp2, BoxRatios -> {1, 1, 1}, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

从图 7-18 中可看出 $f(x,y)=x^2+4y^3$ 在约束条件 $x^2+4y^2=1$ 下有最值。根据拉格朗日乘数法，求得最大值为 $f(\pm1,0)=1$，最小值 $f(0,-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{2}$，输入以下 Mathematica 语句，画出 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)=x^2+4y^2-1$ 的等高线图如图 7-19。

```
g[x_, y_] = x^2 + 4 y^2 - 1;dfx = D[f[x, y], x];
 dfy = D[ f[x, y], y];dgx = D[g[x, y], x]; dgy = D[g[x, y], y];
eq1 = dfx == Lambda   dgx; eq2 = dfy == Lambda dgy;eq3 = g[x, y] == 0;
extpoints = Solve[{eq1, eq2, eq3}, {x, y, Lambda}]
TableForm[{x, y, f[x, y]} /. extpoints, TableHeadings -> {None, {"x", "y", "f[x,y]"}}]
cp1 = ContourPlot[g[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},Contours -> {0}, PlotPoints -> 60,
              ContourShading -> False, Frame -> False, Axes -> Automatic,
              ContourStyle -> Dashing[{0.01}], AxesOrigin -> {0, 0}]
cp2 = ContourPlot[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},Contours -> 15, PlotPoints -> 60,
      ContourShading -> False, PlotRange -> {-2, 2}, Frame -> False,
      Axes -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
Show[cp1, cp2, PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}}, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

从图 7-19 中可看出最值出现在 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 等高线相切的点处。

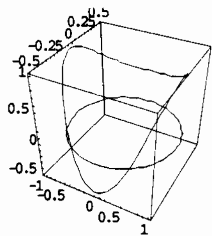


图 7-18

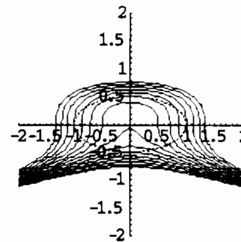


图 7-19

练习 9 试解释最值出现在 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 等高线相切的点处这一现象。

练习 10 求下列函数的约束条件下的最值。

(a) $f(x,y)=2x+y$, $x^2+4y^2=1$

(b) $f(x,y)=x^2+y^2$, $x^4+y^4=1$

实验八　多元函数积分学

本实验的目的是加深理解重积分的概念及其几何意义，以及以平面替代曲面的思想，直观了解一些常见图形的投影区域。

8.1　二重积分的概念

二重积分本质上是一个特殊和式的极限，即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

实验 1　从图形的角度理解 $\iint_D\left[1-\frac{1}{4}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D:[-1,1]\times[-1,1]$。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到一系列图形如图 8-1。

```
Clear[f];f[x_, y_] = 1 - (x^2 + y^2)/4.;a = -1.; b = 1.; c = -1.; d = 1.;
step = {2, 1, 0.5, 1/3, 0.2};g1 = Plot3D[f[x, y], {x, a, b}, {y, c, d}];
For[k = 1, k < 6, k++, step1 = step[[k]]; step2 = step[[k]];
  m = (b - a)/step1; n = (d - c)/step2; gg = {};
    txyz = Flatten[Table[{x, y, f[x, y]} // N, {x, a, b, step1}, {y, c, d, step2}], 1];
   For[j = 1, j <= n, j++, ss = (j - 1)*m;
      For[i = 1, i <= m, i++, fz = (txyz[[i + j - 1 + ss, 3]] + txyz[[i + j + ss, 3]] +
                              txyz[[i + j + m + ss, 3]] + txyz[[i + j + m + 1 + ss, 3]])/4;
        pp1 = {txyz[[i + j - 1 + ss, 1]], txyz[[i + j - 1 + ss, 2]], 0};
      pp2 = {txyz[[i + j + m + 1 + ss, 1]], txyz[[i + j + m + 1 + ss, 2]], fz};
      gg = Append[gg, Graphics3D[Cuboid[pp1, pp2]]]]];
  Show[g1, gg, PlotRange -> {{a, b}, {c, d}, {0, 1}}]]
```

图 8-1

练习 1 从图形的角度理解 $\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D:[-1,1]\times[-1,1]$。

8.2 空间图形分析与投影区域的确定

在三重积分中，由于积分区域是立体图形，我们可以借助于图形帮助确定化为累次积分的上、下限。绘制曲面

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}, \quad u \in [u_{\min}, u_{\max}], v \in [v_{\min}, v_{\max}]$$

在坐标面的投影的 Mathematica 命令分别为：

绘制曲面在 yOz 坐标面上的投影，将 x 设为常数 a，即

ParametricPlot3D[{a,y[u,v],z[u,v]},{u,umin,umax},{v,vmin,vmax},选项]

绘制曲面在 zOx 坐标面上的投影，将 y 设为常数 b，即

ParametricPlot3D[{x[u,v],b,z[u,v]},{u,umin,umax},{v,vmin,vmax},选项]

绘制曲面在 xOy 坐标面上的投影，将 y 设为常数 c，即

ParametricPlot3D[{x[u,v],y[u,v],c},{u,umin,umax},{v,vmin,vmax},选项]

实验 2 画出椭球面 $\begin{cases} x = 2\sin u\cos v \\ y = \sin u\sin v \\ z = \cos u \end{cases}$, $u \in [0,\pi]$, $v \in [0,2\pi]$，在三个坐标面上的投影。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到椭球面及其在三个坐标面上的投影如图 8-2。

```
Clear[p, p1, p2, p3];
p = ParametricPlot3D[{2 Sin[u]*Cos[v], Sin[u]*Sin[v], Cos[u]}, {u, 0, Pi}, {v,0, 2 Pi}];
px = ParametricPlot3D[{-2, Sin[u]*Sin[v], Cos[u]}, {u, 0, Pi}, {v, 0, 2 Pi},
    DisplayFunction -> Identity];
py = ParametricPlot3D[{2 Sin[u]*Cos[v], 1, Cos[u]}, {u, 0, Pi}, {v, 0, 2 Pi},
    DisplayFunction -> Identity];
pz = ParametricPlot3D[{2 Sin[u]*Cos[v], Sin[u]*Sin[v], 1}, {u, 0, Pi}, {v, 0, 2 Pi},
    DisplayFunction -> Identity];
Show[p, px, py, pz];
```

也可以直接求出曲面在各坐标面上的投影曲线方程，再画图。

分别将 $x=0, y=0, z=0$ 代入椭球面方程，求出椭球面分别在 yOz 面、zOx 面、xOy 面上投影曲线的方程分别为：

$$y^2+z^2=1，即 \begin{cases} y = \cos v \\ z = \sin v \end{cases}, \quad v \in [0,2\pi]$$

$$\frac{x^2}{2^2}+z^2=1，即 \begin{cases} x = 2\cos v \\ z = \sin v \end{cases}, \quad v \in [0,2\pi]$$

$$\frac{x^2}{2^2}+y^2=1，即 \begin{cases} x = 2\cos v \\ y = \sin v \end{cases}, \quad v \in [0,2\pi]$$

输入以下 Mathematica 语句，分别作出投影曲线如图 8-3。

```
px1 = ParametricPlot[{Cos[v], Sin[v]}, {v, 0, 2 Pi}, AxesLabel -> {"Y", "Z"},
                    AspectRatio -> Automatic, DisplayFunction -> Identity];
py1 = ParametricPlot[{2 Cos[v], Sin[v]}, {v, 0, 2 Pi}, AxesLabel -> {"X", "Z"}, AspectRatio ->
                    Automatic, DisplayFunction -> Identity];
pz1 = ParametricPlot[{2 Cos[v], Sin[v]}, {v, 0, 2 Pi}, AxesLabel -> {"X", "Y"}, AspectRatio ->
                    Automatic, DisplayFunction -> Identity];
Show[GraphicsArray[{px1, py1, pz1}]]
```

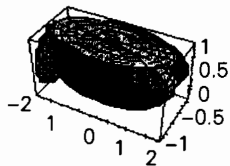


图 8-2

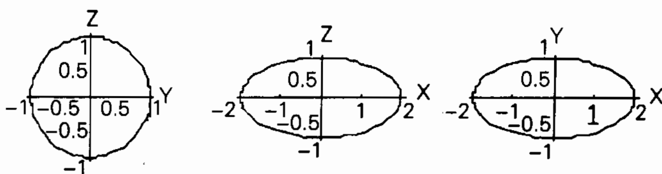


图 8-3

实验 3 画出双曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在三个坐标面上的投影。

解：双曲面的参数方程为 $\begin{cases} x=\text{ch}z\cos\varphi \\ y=\text{ch}z\sin\varphi \\ z=\text{sh}z \end{cases}$，$\varphi\in[0,2\pi]$。输入以下 Mathematica 语句，得到双曲面及其在三个坐标面上的投影如图 8-4。

```
Clear[p, p1, p2, p3]
p = ParametricPlot3D[{2 Cosh[z]*Cos[phi], Cosh[z]*Sin[phi], Sinh[z]}, {z, -2, 2},
   {phi, 0, 2 Pi}];
px = ParametricPlot3D[{-8, Cosh[z]*Sin[phi], Sinh[z]}, {z, -2, 2}, {phi, 0, 2 Pi},
    DisplayFunction -> Identity];
py = ParametricPlot3D[{2 Cosh[z]*Cos[phi], 4, Sinh[z]}, {z, -2, 2}, {phi, 0, 2 Pi},
    DisplayFunction -> Identity];
pz = ParametricPlot3D[{2 Cosh[z]*Cos[phi], Cosh[z]*Sin[phi], 4}, {z, -2, 2},
   {phi, 0, 2 Pi}, DisplayFunction -> Identity];   Show[p, px, py, pz];
```

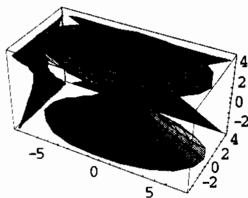


图 8-4

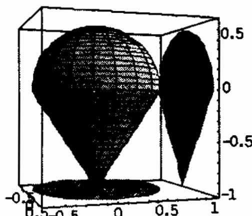


图 8-5

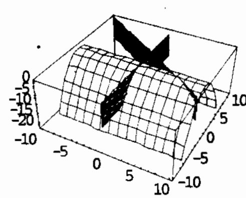


图 8-6

练习 2 分别画出以下曲面及其在三个坐标面上的投影图。

(1) 圆柱面 $x^2+y^2=1, -1\leqslant z\leqslant 1$；(2) $x^2+y^2=4z, 0\leqslant z\leqslant 1$

实验 4 画出上半球面 $x^2+y^2+z^2=\frac{4}{9}$ 与圆锥面 $(z+1)^2=\frac{9}{4}(x^2+y^2)$ 的组合图形在 xOz 与 xOy

面上的投影。

解：上半球面的参数方程为$\begin{cases} x=\frac{2}{3}\sin v\cos u \\ y=\frac{2}{3}\sin v\sin u \\ z=\frac{2}{3}\cos v \end{cases}$，$u\in[0,2\pi], v\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，圆锥面的参数方程为

$\begin{cases} x=\gamma\sin u \\ y=\gamma\cos u \\ z=3\gamma/2-1 \end{cases}$，$u\in[0,2\pi]$。输入以下 Mathematica 语句，得到组合曲面及其在 xOz 面、xOy 面上的投影如图 8-5。

```
pz = ParametricPlot3D[{2 Sin[u]*Cos[v]/3, 2 Sin[u]*Sin[v]/3, -1}, {u, 0,Pi/2},
                      {v, 0, 2 Pi}, DisplayFunction -> Identity];
py1 = ParametricPlot3D[{2 Sin[u]*Cos[v]/3, 1, 2 /3Cos[u]}, {u, 0, Pi/2}, {v, 0, 2 Pi},
                      DisplayFunction -> Identity];
py2 = ParametricPlot3D[{r*Sin[u], 1, (3/2)*r - 1}, {u, 0, 2 Pi}, {r, 0, 2/3},
                      DisplayFunction -> Identity];
py = Show[py1, py2];Show[p3, pz, py, ViewPoint -> {3, -1, 0}, DisplayFunction -> $Display
Function];
```

实验 5 画出由 $z=-\frac{1}{2}y^2$，$2x+3y-12=0$，$x=0$，$z=0$ 所围成的立体的图形，并作出其在 xOy 面上投影区域的图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，得所围成立体的图形如图 8-6。

```
Clear[g1, g2, g3];g1 = Plot3D[-y^2/2, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, Shading -> False];
g2 = ParametricPlot3D[{x, 4 - 2*x/3, z}, {x, -10, 10}, {z, -10, 0}, Shading -> False];
g3 = ParametricPlot3D[{0, y, z}, {y, -10, 10}, {z, -10, 0}, Shading -> False];
Show[g1, g2, g3]; Plot[4 - 2*x/3, {x, -10, 10}];
```

从图 8-6 可以看出，空间立体在 xOy 面上的投影是由曲面 $z=-\frac{y^2}{2}$，$2x+3y-12=0$ 及 $x=0$ 在 xOy 面上的投影曲线所组成。投影区域的图形如图 8-7。

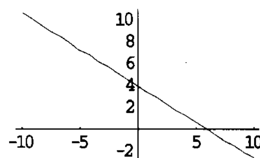


图 8-7

实验 6 画出由曲面 $z=x^2+y^2$，$y=x^2$，$y=1$，$z=0$ 所围成的立体的图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到所围成的立体的图形如图 8-8。

```
Clear[g1, g2, g3, g4];
```

```
g1 = ParametricPlot3D[{u, v, u^2 + v^2}, {u, -1, 1}, {v, -0.2, Sqrt[2]},
                      PlotRange -> {0, 2}, DisplayFunction -> Identity];
g2 = ParametricPlot3D[{u, u^2, v}, {u, -1, 1}, {v, 0, 2}, DisplayFunction -> Identity];
g3 = ParametricPlot3D[{u, 1, v}, {u, -1, 1}, {v, 0, 2.2}, DisplayFunction -> Identity];
g4 = ParametricPlot3D[{u, v, 0}, {u, -1, 1}, {v, -0.2, 1}, DisplayFunction -> Identity];
Show[g1, g2, g3, g4, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

练习 3 分别画出以下空间立体的图形。

(1) 由曲面 $z = e^{-x^2-y^2}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ 所围成的立体；

(2) 由曲面 $z = 1 + x + y$, $z = 0$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ 所围成的立体。

实验 7 画出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与柱面 $x^2 + y^2 = x$ 的交线。

解：输入以下 Mathematica 语句，同时显示球面和柱面的图形得交线图形如图 8-9。

```
Clear[g1, g2, g3, g4]
g1 = ParametricPlot3D[{Sin[u]*Cos[v], Sin[u]*Sin[v], Cos[u]}, {u, 0, Pi}, {v, 0, 2 Pi},
                      DisplayFunction -> Identity];
g2 = ParametricPlot3D[{1/2 + Cos[t]/2, Sin[t]/2, r}, {t, 0, 2 Pi}, {r, -1.2, 1.2},
                      DisplayFunction -> Identity];
Show[g1, g2, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

也可以先求交线方程 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos t \\ y = \dfrac{1}{2}\sin t, \\ z = \sin t/2 \end{cases}$ $t \in [-2\pi, 2\pi]$。

输入以下 Mathematica 语句，得交线的图形如图 8-10。

```
Clear[x, y, z, t, p2];x[t_] = (1 + Cos[t])/2.;y[t_] = Sin[t]/2.;z[t_] = Sin[t/2.];
p2 = ParametricPlot3D[{x[t], y[t], z[t]}, {t, -2*Pi, 2*Pi}];
```

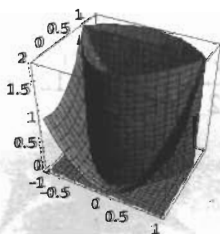


图 8-8

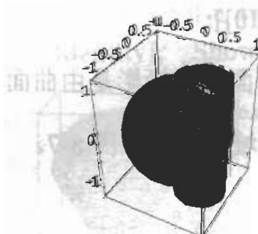


图 8-9

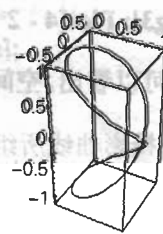


图 8-10

练习 4 画出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线。

实验 8 画出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 含在柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 内部的曲面图形，并画出其在 xOy 面上的投影区域的图形。

解：不妨取 $a = 1$，输入以下 Mathematica 语句，得曲面的图形如图 8-11 及其在 xOy 面上的投影区域如图 8-12。

```
Clear[g1, g2, g3, g4]
g1 = ParametricPlot3D[{Sin[u]*Cos[v], Sin[u]*Sin[v], Cos[u]}, {u, 0, Pi}, {v, 0, 2 Pi},
                     DisplayFunction -> Identity];
g2 = ParametricPlot3D[{1/2 + Cos[t]/2, Sin[t]/2, r}, {t, 0, 2 Pi}, {r, -1.2, 1.2},
                  DisplayFunction -> Identity];
p1 = Show[g1, g2, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
g3 = ParametricPlot3D[{Sin[u]*Cos[v], Sin[u]*Sin[v], 0}, {u, 0, Pi}, {v, 0, 2 Pi},
                     Shading -> False, DisplayFunction -> Identity];
g4 = ParametricPlot3D[{1/2 + Cos[t]/2, Sin[t]/2, 0}, {t, 0, 2 Pi}, DisplayFunction -> Identity];
p2 = Show[g3, g4, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
g5 = ParametricPlot[{Cos[v], Sin[v]}, {v, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic,
                  DisplayFunction -> Identity];
g6 = ParametricPlot[{1/2 + Cos[t]/2, Sin[t]/2}, {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic,
                DisplayFunction -> Identity];
p3 = Show[g5, g6, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
Show[GraphicsArray[{p2, p3}], DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

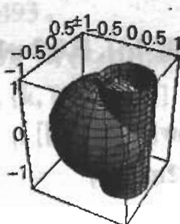


图 8-11

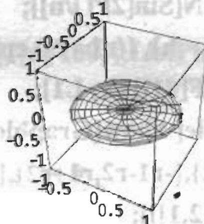


图 8-12

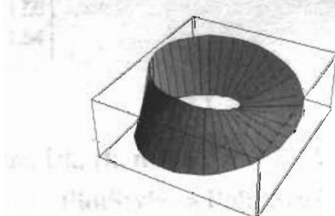
8.3 默比乌斯带

默比乌斯(Möbius)带是一种所谓的单侧曲面。默比乌斯带的参数方程为

$$\begin{cases} x = r(t,v)\cos t \\ y = r(t,v)\sin t \\ z = bv\sin(t/2) \end{cases}$$，其中 $r(t,v) = a + bv\cos(t/2)$， a,b 为常数， $t \in [0,2\pi], v \in [-1,1]$。

实验 9 画出默比乌斯带的图形。

解：不妨分别选取 $a=2,b=1$； $a=3,b=1$，默比乌斯带的图形如图 8-13。



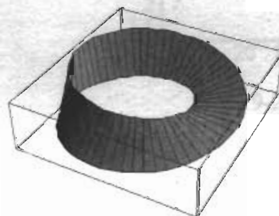


图 8-13 （左图 $a=2,b=1$，右图 $a=3,b=1$）

练习 5 任意选取参数 a, b，画出默比乌斯带的图形，并观察其图形特点。

附 实验 9 的 Mathematica 程序

```
<<Graphics`Animation`
<<Graphics`Shapes`
Clear[Arrow,ShowMoebiusStrip]
Arrow[{{x1_,y1_,z1_},{x2_,y2_,z2_}}] := {Graphics3D[Line[{{x1,y1,z1},{x2,y2,z2}}]],
   Graphics3D[{RGBColor[1,1,0],PointSize[0.05],Point[{x1,y1,z1}]}],
   Graphics3D[{RGBColor[1,0,0],PointSize[0.05],Point[{x2,y2,z2}]}]}
Clear[F,ll,dd];ll = 1;
F[{{x1_,y1_,z1_},{x2_,y2_,z2_}}] := Block[ {x3,y3,z3,z4,len},
   x3=(x1+x2)/2; y3=(y1+y2)/2; z3=(z1+z2)/2;
   z4=If[z2-z1==0,1/2, (x3*(x2-x1)+y3*(y2-y1))/(z2-z1)+z3 ]; len=Sqrt[x3^2+y3^2+(z3-z4)^2];
   If[z2-z1==0,{x3,y3,dd*ll}, dd = If[y1>y2,-1,1]; {x3,y3,z3}+ dd*ll/len* {x3, y3, z3-z4}]]
ShowMoebiusStrip[r1_,r2_,n_:r1*20] := Block[{L1,L2,p1},
   L1 = Block[{cphi, sphi, h, rs}, Table[rs = N[r2 Cos[Pi i/n]]; h = N[r2 Sin[Pi i/n]];
    cphi = N[Cos[2Pi i/n]]; sphi = N[Sin[2Pi i/n]];
    {{(r1 + rs) cphi, (r1 + rs) sphi,   h}, {(r1 - rs) cphi, (r1 - rs) sphi, -h}}, {i,0,2n-1}]];
   L2 = Map[({(#1[[1]]+#1[[2]])/2,F[#1]})&, L1];
  p1 = MoebiusStrip[r1,r2,n]; Table[ Show[Graphics3D[p1], Arrow[ L2[[i+1]] ],
     PlotRange->{{-(r1+r2),r1+r2},{-r1-r2,r1+r2},{-r2,r2}}],{ i, 0,2n-1}];]
Show[Graphics3D[MoebiusStrip[2,1]]];
Show[Graphics3D[MoebiusStrip[3,1]]];

    ShowMoebiusStrip[2,1,15]
```

实验九　无穷级数与函数逼近

本实验的目的是体会级数部分和的变化趋势，进一步理解级数的判敛法，幂级数部分和对函数的逼近以及进行函数值的近似计算，展示傅里叶级数对周期函数的逼近情况。

9.1　级数部分和的变化趋势

在实验二中，我们通过图形能够清晰地显示极限的概念。下面我们将用散点图来展示级数部分和序列的变化趋势。

实验 1　观察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的部分和序列的变化趋势。

解：级数的部分和为 $S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$。输入以下 Mathematica 语句，得变化趋势如图 9-1。级数和的近似值为1.64493。

```
s[n_] = Sum[1/k^2, {k, n}];data = Table[s[n], {n, 100}];ListPlot[data];
N[Sum[1/k^2, {k, Infinity}]]
N[Sum[1/k^2, {k, Infinity}], 40]
```

练习 1　分别观察以下级数部分和序列的变化趋势。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^n}{3^n}$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$　　(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{3}$　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

实验 2　观察调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的部分和序列的变化趋势。

解：级数的部分和为 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$。输入以下 Mathematica 语句，得变化趋势如图 9-2。

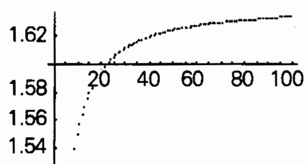


图 9-1

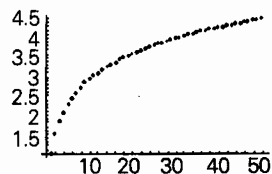


图 9-2

```
s[n_] = Sum[1/k, {k, n}]; data = Table[s[n], {n, 50}];
ListPlot[data, PlotStyle -> PointSize[0.02]];
```

练习 2　观察几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}aq^n\ (a\neq 0)$ 的部分和序列的变化趋势。

9.2　级数的判敛

9.2.1　比较审敛法的意义

在用比较审敛法判别一个级数是否收敛时，需要与另一个已知收敛或发散的级数进行比较，这个作为比较用的级数叫做参考级数（或称基本级数）。在使用比较审敛法时我们常用几何级数$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n\,(a\neq 0)$，调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$作为参考级数。

判定级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$的收敛性。

解：由于当$n\geqslant 2$时，$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，故级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$发散。输入以下 Mathematica 语句，得图形如图 9-3。从图 9-3 中可以看到该发散级数趋于∞的速度比调和级数快。

```
s1[n_] = Sum[1/Log[k], {k, 2, n}];s2[n_] = Sum[1/k, {k, n}];
data1 = Table[s1[n], {n, 2, 100}];data2 = Table[s2[n], {n, 100}];
g1 = ListPlot[data1];g2 = ListPlot[data2];Show[g1, g2];
```

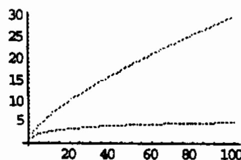


图 9-3

观察$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$的收敛性。

解：输入以下 Mathematica 语句，可得到不同p值级数的图形如图 9-4。

```
s[n_] = Sum[1/k^p, {k, n}];m = 3;
For[p = -2, p < m, p++,data1 = Table[s[n], {n, 100}];ListPlot[data1];]
```

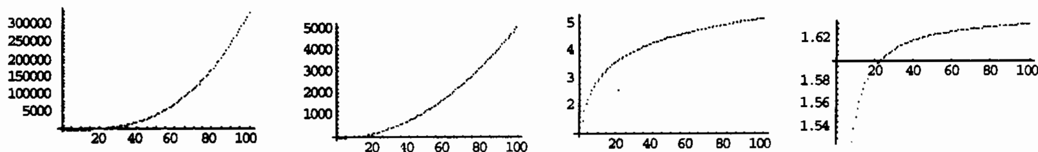


图 9-4　（从左至右$p=-2,-1,2,3$）

由图 9-4 可知当$p>1$时$p-$级数收敛。

练习 3　判断下列级数的敛散性。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$；(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n\sqrt{n}}$；(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$。

9.2.2　交错级数审敛法的意义

如果交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\,(a_n>0)$的一般项满足以下两个条件：

(1) 绝对值逐项递减，即$a_{n+1}\leqslant a_n\,(n=1,2,\cdots)$；

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$。

则交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛。

实验 5 判断交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}(p>0)$的敛散性。

解：由于$\frac{1}{n^p}$随 n 增大而递减地趋于零，因而此级数收敛。输入以下 Mathematica 语句，可得图形如图 9-5。从图 9-5 中可以观察到其变化趋势。

```
s[n_] = Sum[(-1)^(k - 1)/k^p, {k, n}];m = 5;u[n_] = (-1)^(n - 1)/n^p;
For[p = 1, p < m, p++,
  data1 = Table[s[n], {n, 50}];data2 = Table[u[n], {n, 50}];
  g1 = ListPlot[data1, PlotStyle -> PointSize[0.02], PlotLabel -> "s[n]"];
  g2 = ListPlot[data2, PlotStyle -> PointSize[0.02], PlotLabel -> "u[n]"];
  Print["p=", p]]
```

图 9-5　$p=1$时的部分和s_n与一般项u_n的变化趋势

练习 4　讨论交错级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}$的敛散性。

9.2.3　通过图形观察级数的收敛性

如果我们将级数的所有部分和用竖直线段画出，便得到类似条形码的图形，通过这种图形可以直接看出级数的收敛性。

实验 6 画出级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$的部分和分布图。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$部分和的分布图如图 9-6。从图 9-6 中可以看出它收敛于 0.693 附近的一个数。

```
Clear[sn, g]; sn = 0; n = 1; g = {}; m = 3;
While[1/n > 10^-m, sn = sn + (-1)^(n - 1)/n;
g = Append[g, Graphics[{RGBColor[Abs[Sin[n]], 0, 1/n], Line[{{sn, 0},
        {sn, 1}}]}]];n++];
Show[g, PlotRange -> {-0.2, 1.3}, Axes -> True];
```

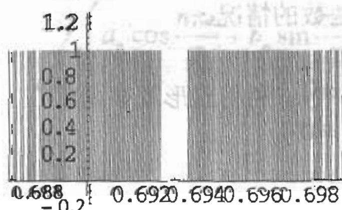


图 9-6

练习 5　画出调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的部分和分布图，并观察其发散的图形特征。

9.3　函数的幂级数展开

如果函数在x_0邻域内具有任意阶导数，函数可以展开为x_0处的幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称之为泰勒级数。特别地，当$x_0=0$时，称为$f(x)$的麦克劳林级数。

实验 7　写出函数$f(x)=\arcsin x$的幂级数展开式，并利用图形考察幂级数部分和逼近函数的情况。

解：根据幂级数的展开公式，若$f(x)$能展开成幂级数，其展开式为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

输入以下 Mathematica 语句，可得到幂级数部分和逼近函数的图形如图 9-7。

```
f[x_] = ArcSin[x];g[n_] = D[f[x], {x, n}] /. x -> 0;
s[n_, x_] = Sum[g[k]*(x^k)/k!, {k, 0, n}];
t = Table[s[n, x], {n, 10}];Plot[Evaluate[t], {x, -1, 1}];
```

从图 9-7 中可看到：当n越大时，函数的幂级数越逼近函数本身。

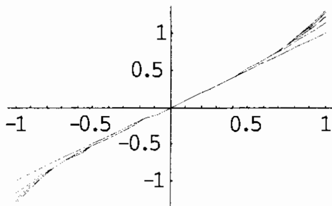


图 9-7

练习 6　贝塞尔（Bessel）函数是一类重要的微分方程的解，它在天体物理和热量分布问题中有着重要的应用。零阶贝塞尔函数定义为下列幂级数的和函数

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

利用图形考察幂级数部分和逼近函数的情况。

练习 7　对函数$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，利用图形观察函数在$x=0$附近的性态，并说明$f(x)$的麦克劳林公式的余项当$n\to\infty$时并不趋于零。

练习 8　伯恩斯坦(Bernstein)多项式定义为

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$$

其中$\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$。

(1) 画出$n=2,4,7$时伯恩斯坦多项式逼近函数$f(x)=3-\dfrac{1}{x+0.1}$的情况；

(2) 利用图形的方法找出一个合适的n，使得$|B_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,其中$\varepsilon=0.4$。

实验 8 利用幂级数展开式计算$\sqrt[5]{240}$（精确到10^{-10}）。

解：$\sqrt[5]{240}=\sqrt[5]{243-3}=3\left(1-\dfrac{1}{3^4}\right)^{\frac{1}{5}}$。根据$(1+x)^m$在$x=0$处的展开式，有

$$\sqrt[5]{240}=3\left(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}-\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}-\frac{1\cdot 4\cdot 9}{5^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{3^{12}}-\cdots\right)$$

故前$n(n>2)$项部分和为

$$S_n=3\left(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{\prod_{i=1}^{k-1}(5i-1)}{5^k\cdot k!}\cdot\frac{1}{3^{4k}}\right)$$

输入以下 Mathematica 语句，得结果为$\sqrt[5]{240}\approx 2.992555739$。

```
s[n_] = 3(1 - 1/(5*3^4) - Sum[Product[5 i - 1, {i, 1, k - 1}]/(5^k k! 3^(4k)),
                {k, 2, n - 1}]);
r[n_] = Product[5 i - 1, {i, 1, n - 1}]/5^n/n!/3^(4n - 5)/80;
delta = 10^(-10); n0 = 100;
Do[Print["n=", n, ",", "s[n]=", N[s[n], 20]];
  If[r[n] < delta, Break[]];If[n == n0, Print["failed"]], {n, n0}]
```

练习 9 利用幂级数展开式$\arctan x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$近似计算$\pi$的值。

9.4 傅里叶（Fourier）级数

设$f(x)$是以$2T$为周期的周期函数，在任一周期内，$f(x)$除在有限个第一类间断点外都连续，并且只有有限个极值点，则$f(x)$可以展开为 Fourier 级数。

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{n\pi x}{T}\right)$$

其中，

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T}^{T}f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\mathrm{d}x\\ b_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T}^{T}f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\mathrm{d}x\end{cases},\quad n=1,2,\cdots$$

Fourier 级数在任一点 x_0 处收敛于 $\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$。

泰勒级数和 Fourier 级数本质上都是利用多项式函数或三角函数的叠加，去逼近已知函数得到的。

在实际问题中，经常需要将一个周期函数分解成一系列简单周期函数的叠加。例如，在信号处理中，将信号分解为简谐波函数的叠加是非常重要的一个步骤。这个问题在数学上便是求周期函数的 Fourier 级数。一个周期函数的 Fourier 级数如果存在的话，总是可以通过计算求出来。但是这个级数是否收敛于原来的函数呢？

实验 9 设 $f(x)$ 是周期为 2π，振幅为 1 的方波函数，$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1 \ , & -\pi\leqslant x<0\\ 1 \ , & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$$

试生成 $f(x)$ 的 Fourier 级数，并画图形观察该函数的部分和逼近 $f(x)$ 的情形。

解：输入以下 Mathematica 语句，得部分和逼近 $f(x)$ 的图形如图 9-8。

```
Clear[f]; n = 16; g[x_] := 0;
f[x_] = Which[-2*Pi <= x < -Pi, 1, -Pi <= x < 0, -1, 0 <= x < Pi, 1,
      Pi <= x < 2*Pi, -1];
g1 = Plot[f[x], {x, -2*Pi, 2*Pi}, PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1]];
For[i = 1, i <= n, i++,bi = 2*(1 - (-1)^i)/(i*Pi);
  g[x_] = g[x] + bi*Sin[i*x];
  g2 = Plot[g[x], {x, -2*Pi, 2*Pi}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0],
      DisplayFunction -> Identity];
  Show[g1, g2, DisplayFunction -> $DisplayFunction]]
```

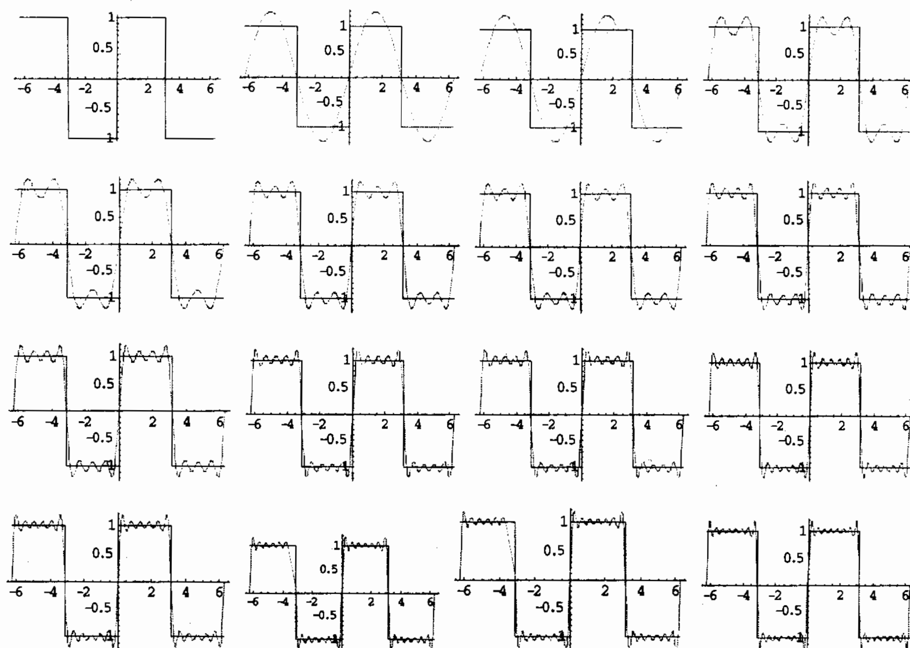


图 9-8

从图中可以看到，当 n 越大时逼近函数的效果越好，还可注意到 Fourier 级数的逼近是整体性的。

实验 10 将函数 $f(x)=x^2+1$ 展开成周期为 2 的 Fourier 级数。

解：输入以下 Mathematica 语句，得 $f(x)$的 1~5 阶 Fourier 展开式为：

```
Remove[fseries];fseries[f_, T_, j_] :=
  Module[{a, b, i, t, ss, g1, g2}, a[0] = Integrate[f, {x, -T, T}]/T;
    ss = a[0]/2;Do[t = i*Pi/T;
         a[i_] = Integrate[f*Cos[t*x], {x, -T, T}]/T;
         b[i_] = Integrate[f*Sin[t*x], {x, -T, T}]/T;
       ss = ss + a[i] Cos[t*x] + b[i]*Sin[t*x], {i, 1, j}];
    Print[ss]
      Plot[Evaluate[ss], {x, -T, T}, DisplayFunction -> Identity]]

f = x^2 + 1;T = 2;n = 5;
g = Plot[f, {x, -T, T}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]];
For[j = 1, j <= n, j++,p = fseries[f, T, j];
  Show[g, p, DisplayFunction -> $DisplayFunction]]
```

$$\frac{7}{3}-\frac{16\cos\left[\frac{\pi}{2}x\right]}{\pi^2};\quad \frac{7}{3}-\frac{16\cos\left[\frac{\pi}{2}x\right]}{\pi^2}+\frac{4\cos\pi x}{\pi^2};\quad \frac{7}{3}-\frac{16\cos\left[\frac{\pi}{2}x\right]}{\pi^2}+\frac{4\cos\pi x}{\pi^2}-\frac{16\cos\frac{3}{2}\pi x}{9\pi^2}$$

$$\frac{7}{3}-\frac{16\cos\left[\frac{\pi}{2}x\right]}{\pi^2}+\frac{4\cos\pi x}{\pi^2}-\frac{16\cos\frac{3}{2}\pi x}{9\pi^2}+\frac{\cos 2x}{\pi^2}$$

$$\frac{7}{3}-\frac{16\cos\left[\frac{\pi}{2}x\right]}{\pi^2}+\frac{4\cos\pi x}{\pi^2}-\frac{16\cos\frac{3}{2}\pi x}{9\pi^2}+\frac{\cos 2x}{\pi^2}-\frac{16\cos\frac{5\pi}{2}x}{25\pi^2}$$

$f(x)$及其 1~5 阶 Fourier 展开式的图形如图 9-9。

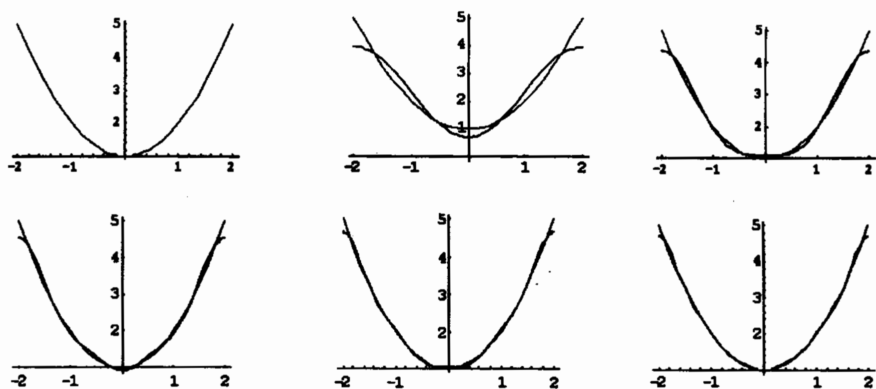


图 9-9

练习 10　在实验 9 中增大 n 的值，观察简谐波的叠加是否愈来愈逼近方波？不管 n 多大，为什么逼近曲线与 x 轴的交点总是不变？另外在间断点附近逼近曲线是否总有较大的跳动？你能说明为什么吗？

练习 11　画出 $f(x)=|x|(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 及它的 k 阶 Fourier 多项式 $F_k(x)$ $(k=1,2,\cdots,6)$ 的图形，观察 $y=F_k(x)$ 逼近 $y=f(x)$ 的情况。

实验十　常微分方程

本实验的目的是理解常微分方程解的概念以及积分曲线和方向场的含义。

10.1　常微分方程的精确解

常微分方程解析形式的解称为常微分方程的精确解。在 Mathematica 中对于简单的微分方程可以求得其精确解。

实验 1　求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x}y$，并作出其积分曲线。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到微分方程的解为 $y=C\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}}$。

```
DSolve[y'[x] == E^x y[x], y[x], x]
```

下面我们在同一坐标系中作出这个微分方程的积分曲线（设 C=-3, -2,-1,0,1,2,3），输入以下 Mathematica 语句，得图形如图 10-1。

```
t = Table[c*E^(E^x), {c, -3, 3}];Plot[Evaluate[t], {x, -1, 1.5}];
```

练习 1　求解微分方程 $x\mathrm{d}y-y\ln y\mathrm{d}x=0$，并作出其积分曲线。

实验 2　求伯努利方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=y^{2}(\cos x-\sin x)$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的解。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到微分方程的特解 $y=\frac{1}{\mathrm{e}^{x}-\sin x}$。

```
DSolve[{y'[x] + y[x] == y[x]^2*(Cos[x] - Sin[x]), y[0] == 1}, y[x], x]
```

输入以下 Mathematica 语句，得积分曲线如图 10-2。

```
Plot[Evaluate[-1/(-Exp[x] - Sin[x])], {x, -9, 9}];
```

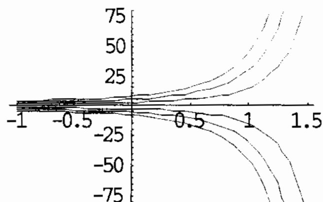


图 10-1

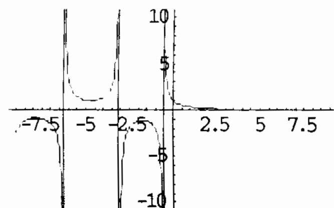


图 10-2

实验 3　求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$，并作出积分曲线。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到积分方程的解为 $y=(x+1)^{2}\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]$。

```
<< Graphics`PlotField`
```

```
DSolve[y'[x] - 2 y[x]/(x + 1) == (x + 1)^(5/2), y[x], x]
```

下面我们在同一坐标系中作出这个微分方程的方向场和积分曲线（设 C=-3, -2,-1,0,1,2,3），输入以下 Mathematica 语句，得图形如图 10-3。

```
t = Table[2 (1 + x)^(7/2)/3 + (1 + x)^2   c, {c, -1, 1}];
g1 = Plot[Evaluate[t], {x, -1, 1}, PlotRange -> {{-1, 1}, {-2, 2}},
        PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0],DisplayFunction -> Identity];
g2 = PlotVectorField[{1, -2 y/(x + 1) + (x + 1)^(5/2)}, {x, -0.999, 1}, {y, -4, 4},
      Frame -> True, ScaleFunction -> (1 &), ScaleFactor -> 0.16, HeadLength -> 0.01,
      PlotPoints -> {20, 25}, DisplayFunction -> Identity];
Show[g1, g2, Axes -> None, Frame -> True, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

实验 4　求解微分方程 $(1-2xy)y' = x^2 + y^2 - 2$，并作出其积分曲线。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到微分方程的解为 $y = \frac{x^3}{3} + x(-2 + y^2) + C$。

```
<< Graphics`PlotField`
DSolve[(1 - 2 *x* y[x])*y'[x] == x^2 + (y[x])^2 - 2, y[x], x]
```

我们在-3≤C≤3 时作出积分曲线，即输入以下 Mathematica 语句，得微分方程的向量场与积分曲线、等值线的图形如图 10-4。

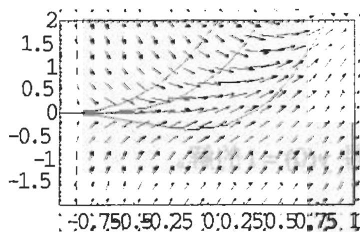


图 10-3

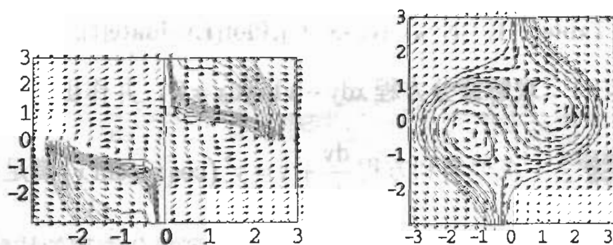


图 10-4

```
t1 = Table[(3 + Sqrt[3])Sqrt[3 + 24 x^2 - 4 x^4 - 4*c*x]/(6*x), {c, -3, 3}];
t2 = Table[(3 - Sqrt[3])Sqrt[3 + 24 x^2 - 4 x^4 - 4*c*x]/(6*x), {c, -3, 3}];
gg1 = Plot[Evaluate[t1], {x, -3, 3}, PlotRange -> {{-3, 3}, {-3, 3}},
      PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], DisplayFunction -> Identity];
gg2 = Plot[Evaluate[t2], {x, -3, 3}, PlotRange -> {{-3, 3}, {-3, 3}},
      PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], DisplayFunction -> Identity];
g1 = ContourPlot[y - x^3/3 - x*(-2 + y^2), {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
      PlotRange -> {-3, 3}, Contours -> 7, ContourShading -> False,
      PlotPoints -> 50, DisplayFunction -> Identity];
g2 = PlotVectorField[{1, (x^2 + y^2 - 2)/(1 - 2*x*y)}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
       Frame -> True, ScaleFunction -> (1 &), ScaleFactor -> 0.16,
      HeadLength -> 0.01, PlotPoints -> {20, 25}, DisplayFunction -> Identity];
Show[g1, g2, Axes -> None, Frame -> True, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
Show[gg1, gg2, g2, Axes -> None, Frame -> True,
     DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

练习 2 求解微分方程 $y'+2xy=1$，并作出其积分曲线。

练习 3 作出下列微分方程的积分曲线。

(1) $(2x-5y+3)\mathrm{d}x-(2x+4y-6)\mathrm{d}y=0$；(2) $(x+y)\mathrm{d}x+(3x+3y-4)\mathrm{d}y=0$。

实验 5 求解微分方程 $y''=2x+\mathrm{e}^x$，并作出其积分曲线。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到微分方程的解为 $y=C_1+C_2x+\mathrm{e}^x+\dfrac{x^3}{3}$。

```
DSolve[y''[x] == 2*x + E^x, y[x], x]
```

输入以下 Mathematica 语句，得积分曲线如图 10-5。

```
g1 = Table[Plot[E^x + x^3/3 + c1 + x *c2, {x, -5, 5}, DisplayFunction -> Identity],
        {c1, -10, 10, 5}, {c2, -5, 5, 5}];
Show[g1, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

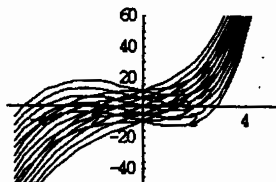


图 10-5

10.2 一阶微分方程在几何中的应用

10.2.1 正交曲线

如果两曲线簇相交时都成正交，则这两曲线簇称为正交轨线。正交轨线有相当广泛的应用，如电力线、磁力线及地球上的经纬线等。平面上的曲线簇通常可表示为

$$F(x,y,c)=0 \tag{10-1}$$

其中 c 为常数，要求 $F(x,y,c)=0$ 的正交轨线，可将 $F(x,y,c)=0$ 化为

$$y'(x)=f(x,y) \tag{10-2}$$

的形式。对于点 (x_0,y_0)，$f(x_0,y_0)$ 代表通过点 (x_0,y_0) 的曲线的斜率。与该曲线正交的另一曲线在该点的斜率为 $-\dfrac{1}{f(x_0,y_0)}$，$f(x_0,y_0)\neq 0$。因此，$F(x,y,c)=0$ 的正交轨线所满足的微分方程为

$$y'=-\frac{1}{f(x,y)} \tag{10-3}$$

实验 6 求 $y^2+2xy-x^2=c$ 的正交轨线。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到其正交轨线的方程为 $y^2+2xy-x^2=c$，它们的图形如图 10-6。

```
<< Graphics`ImplicitPlot`
eqn = y[x]^2 + 2*x*y[x] - x^2 == c;eqn1 = eqn /. y[x] -> y;
fs1 = eqn1 /. Table[{c -> n}, {n, -4, 4, 2}];g1 = ImplicitPlot[fs1, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}];
eqn2 = D[eqn, x];sol = Solve[eqn2, y'[x]][[1, 1]] /. Rule -> Equal;
eqn3 = MapAt[-1/# &, sol, 2];sol2 = Simplify[DSolve[eqn3, y[x], x]];
sol3 = sol2[[1, 1]] /. C[1] -> c /. Rule -> Equal /. y[x] -> y;
sol4 = Map[(# - x)^2 &, sol3] // Simplify;sol5 = sol4/.1/c -> c;
sol6 = sol5 /. Table[{c -> n}, {n, -4, 4, 2}]
g2 = ImplicitPlot[sol6, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}];g = Show[g1, g2];
Show[GraphicsArray[{g1, g2, g}]];
```

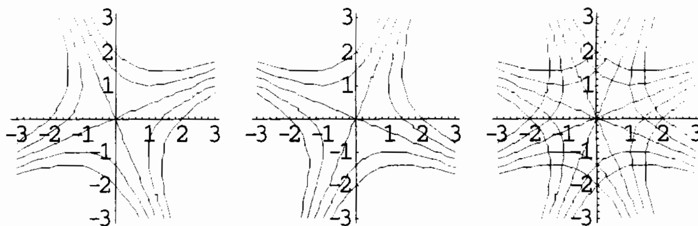


图 10-6

10.2.2 方向场

通常，我们可以把一阶微分方程写为

$$y' = f(x, y) \tag{10-4}$$

的形式。在某个区间 D 中的任一点 (x_0, y_0)，都可以找到微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ 的解 $y(x)$ 在该点斜率 $f(x_0, y_0)$。如果找出足够多的点，则在这个区间内就可以看出这个微分方程的解的趋向，这个图形称为微分方程的方向场（在前面我们已经看到了这一点）。再代入初始条件，就可以顺着斜率的走向画出符合初始条件的解。在这种情况下，通常可以用作图的方式求得解。

实验 7 画出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - y^2$， $y(0) = 0$ 的方向场。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到方向场如图 10-7。

```
<< Graphics`PlotField`
g1 = PlotVectorField[{1, 1 - y^2}, {x, -3, 3}, {y, -2, 2}, Frame -> True, ScaleFunction ->
        (1 &), ScaleFactor -> 0.16, HeadLength -> 0.01, PlotPoints -> {20, 25}];
```

从图 10-7 中可以看到，当初始条件为 $y_0 = \frac{1}{2}$ 时，这个微分方程的解介于-1 和 1 之间，且当 x 趋向于 $-\infty$ 或 $+\infty$ 时， $y(x)$ 分别趋向于-1 与 1。

下面求解这个微分方程，并在同一坐标系中画出方程的解与方向场的图形。

输入以下 Mathematica 语句，得到微分方程的解为 $y(x) = \frac{-1 + \mathrm{e}^{2x}}{1 + \mathrm{e}^{2x}}$。解曲线与方向场的图形如图 10-8。

```
sol = DSolve[{y'[x] == 1 - y[x]^2, y[0] == 0}, y[x], x];
g2 = Plot[sol[[1, 1, 2]], {x, -3, 3}, PlotStyle -> {Hue[0.1], Thickness[0.005]}];
Show[g2, g1, Axes -> None, Frame -> True];
```

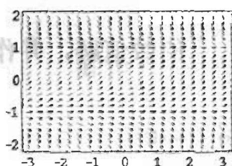


图 10-7

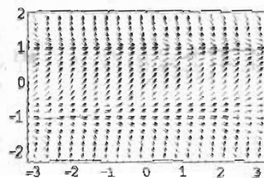


图 10-8

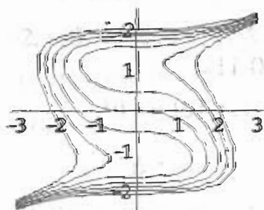
从图 10-8 可以看到，微分方程的解与方向场的箭头方向相吻合。

练习 4　如果将初始条件改为 $y(0)=-\sqrt{2}$，你能根据方向场预测解的形式吗？这个解是否存在奇点？如果有，位于 x 轴的什么地方？

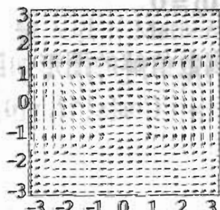
实验 8　验证 $\frac{1}{15}\left(-5x^2-30y+3y^5\right)=c$ 是微分方程 $y'(x)=\frac{x^2}{y^4-2}$ 的通解。

解：输入以下 Mathematica 语句，分别画出积分曲线如图 10-9（a）、微分方程的方向场如图 10-9（b），以及在同一坐标系中画出积分曲线和方向场的图形如图 10-9（c）。

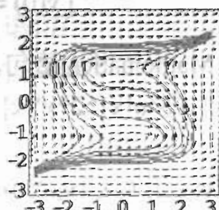
```
<< Graphics`PlotField`
<< Graphics`ImplicitPlot`
sol = (-5x^3 - 30y + 3y^5)/15 == C;
g1 = ImplicitPlot[sol /. Table[{C -> n}, {n, -3, 3}], {x, -3, 3}];
g2 = PlotVectorField[{1, x^2/(y^4 - 2)}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
                Frame -> True, ScaleFunction -> (1 &), ScaleFactor -> 0.16,
                HeadLength -> 0.01, PlotPoints -> {20, 25}];
g = Show[g2, g1, Axes -> None, Frame -> True];    Show[GraphicsArray[{g1, g2, g}]];
```



(a)



(b)



(c)

图 10-9

从图 10-9(c)中可以看出微分方程的积分曲线与方向场的箭头方向吻合，且当 $x\to\infty$ 时，无论初始条件是什么，所有的解都趋向于一条直线方程。

10.3　微分方程的数值解

只有某些特殊类型的微分方程有分析解，因此求微分方程数值解即近似解是非常重要的（将在实验二十七中作进一步的研究）。

对常微分方程$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$，其数值解是指由初始点 x_0 开始的若干离散的 x 值处，即对 $x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n$，求出准确值 $y(x_1),y(x_2),\cdots,y(x_n)$ 的相应近似值 $y_1,y_2,\cdots y_n$。

实验 9 在区间[1, 4]上求出微分方程$\begin{cases} xy'-x^2y\sin x+1=0 \\ y(1)=1 \end{cases}$的数值解，并作出数值解的图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到数值解的图形如图 10-10。

```
<< Graphics`PlotField`
sol = NDSolve[{x*y'[x] - x^2*y[x]*Sin[x] + 1 == 0, y[1] == 1}, y[x], {x, 1, 4}];
f[x_] = Evaluate[y[x] /. sol];
g1 = Plot[f[x], {x, 1, 4}, PlotRange -> All, DisplayFunction -> Identity];
g2 = PlotVectorField[{1, (x^2*y*Sin[x] - 1)/x}, {x, 1, 4}, {y, -2, 9}, Frame -> True,
      ScaleFunction -> (1 &), ScaleFactor -> 0.16, HeadLength -> 0.01,
      PlotPoints -> {20, 25}, DisplayFunction -> Identity];
g = Show[g1, g2, Axes -> None, Frame -> True];
Show[GraphicsArray[{g1, g}], DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

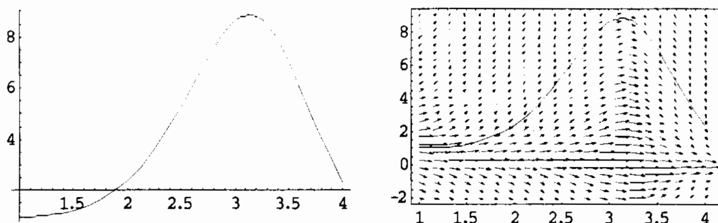


图 10-10

实验 10 求出初值问题$\begin{cases} y''+y'\sin^2 x+y=\cos^2 x \\ y(0)=1, y'(0)=0 \end{cases}$的数值解，并作出数值解的图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到数值解的图形如图 10-11。

```
NDSolve[{y''[x] + Sin[x]^2*y'[x] + y[x] == Cos[x]^2, y[0] == 1, y'[0] == 0},
        y[x], {x, 0, 10}]
Plot[Evaluate[y[x] /. %], {x, 0, 10}];
```

实验 11 求出初值问题$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=3x+y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$，在 $x=0.1$ 处 $(h=0.02)$ 的数值解，精确到10^{-4}，并画出图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到数值解的图形如图 10-12。

```
NDSolve[{y'[x] == 3*x + y[x]^2, y[0] == 1}, y[x], {x, 0, 0.2}, AccuracyGoal -> 4,
        StartingStepSize -> 0.02]
y[0.1] /. %; g1 = Plot[Evaluate[y[x] /. %%], {x, 0, 0.2}];
```

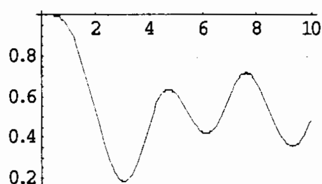


图 10-11

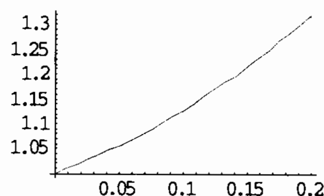


图 10-12

练习 5 求出初值问题$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2\\ y(0)=1\end{cases}$，在 $x=0.5$ 处 $(h=0.1)$ 的数值解，精确到10^{-4}，并作出图形。

10.4 微分方程组的解

实验 12 求解微分方程$\begin{cases}2x''(t)+2x(t)+y(t)=0\\ y''(t)+2x(t)+y(t)=1\\ x(0)=0,x'(0)=10,y(0)=0,y'(0)=40\end{cases}$

解：输入以下 Mathematica 语句，得到微分方程组的解曲线如图 10-13。

```
eq1 = 2x''[t] + 2x[t] + y[t] == 0;eq2 = y''[t] + 2x[t] + y[t] == 1;
sol = DSolve[{eq1, eq2, x[0] == 0, x'[0] == 10, y[0] == 0, y'[0] == 40}, {x[t], y[t]}, t]
Plot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol], {t, 0, 6}, PlotRange -> All,
      PlotStyle -> {Dashing[{0.01}], Thickness[0.005]}];
```

在多数情况下，无法求出非线性微分方程组的精确解。我们可以求出其数值解，并给出解的图形。

实验 13 试研究不同初值条件下微分方程组$\begin{cases}x'(t)=y(t)\\ y'(t)+(x^2(t)+y^2(t)-1)y(t)+x(t)=0\end{cases}$的解。

解：以 $x(0)=-2, y(0)=-1$ 为初值条件，输入以下 Mathematica 语句：

```
sys = Sequence[x'[t] == y[t], y'[t] + (x[t]^2 + y[t]^2 - 1)y[t] + x[t] == 0];
NDSolve[{sys, x[0] == -2, y[0] == -1}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 20}];
```

解得微分方程组的数值解为：

```
{{x[t] -> InterpolatingFunction[{{0., 20.}}, "<>"][t],
   y[t] -> InterpolatingFunction[{{0., 20.}}, "<>"][t]}}
```

以 $x(0)=-2, y(0)=-2$ 为初值条件，输入以下 Mathematica 语句，得到解的图形如图 10-14(a)，从图中可以看出随着 t 值的变大，方程组的解最后绕在一个封闭的区域内。

```
<< Graphics`PlotField`
sol1 = NDSolve[{sys, x[0] == -2, y[0] == -2}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 20}];
g1 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol1], {t, 0, 20},
      PlotRange -> All, AspectRatio -> Automatic];
```

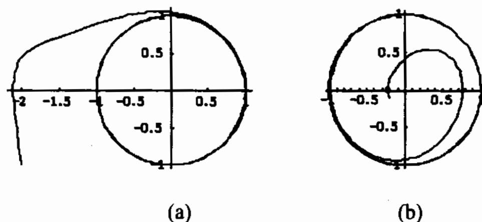
以 $x(0)=-0.2, y(0)=-0.1$ 为初值条件，输入以下 Mathematica 语句，得到另一组解的图形

如图 10-14(b)。

```
sol2 = NDSolve[{sys, x[0] == -0.2, y[0] == -0.1}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 20}];
g2 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol2], {t, 0, 20},
        PlotRange -> All, AspectRatio -> Automatic, PlotPoints -> 256];
Show[GraphicsArray[{g1, g2}]];
```

从图 10-14(b)中可以看出由 $(-0.2,-0.1)$ 开始的曲线，最后也绕在一个封闭的区域内。

图 10-13



(a) (b)

图 10-14

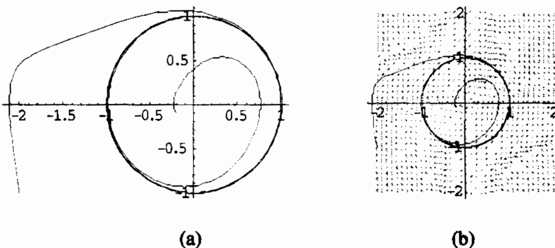
在同一坐标系中显示不同初值条件下的解曲线，输入以下 Mathematica 语句：

```
g = Show[g1, g2];
```

得到图 10-15（a）。由图中可以看出，无论取什么样的初值，所有的解最终绕在一个圆上，称为极限圆。输入以下 Mathematica 语句：

```
g3 = PlotVectorField[{y, -(x^2*y^2 - 1)y - x}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
  AspectRatio -> 0.7, ScaleFunction -> (1 &), ScaleFactor -> 0.08,
  HeadLength -> 0.008, PlotPoints -> {36, 32}, ColorFunction -> (GrayLevel[0.6] &)];
g4 = Show[g, g3];Show[GraphicsArray[{g, g4}]];
```

同时显示方向场和解的图形如图 10-15(b)。我们可以任选一点，作为初始条件，然后顺着箭头的方向绘制解的图形。



(a) (b)

图 10-15

练习 6 试多取几个初值条件，多绘制几条解曲线，观察实验 13 中图形的变化情况。

实验 14 洛伦兹（Lorenz）方程组是由三个一阶微分方程组成的方程组。这三个方程看似简单，也没有包含复杂的函数，但它的解却很有趣和耐人寻味。试求解洛伦兹微分方程组

$$\begin{cases} x'(t) = 16y(t) - 16x(t) \\ y'(t) = -x(t)z(t) + 45x(t) - y(t) \\ z'(t) = x(t)y(t) - 4z(t) \\ x(0) = 12, y(0) = 4, z(0) = 0 \end{cases}$$

，并画出解曲线的图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到数值解的图形如图 10-16（a）。

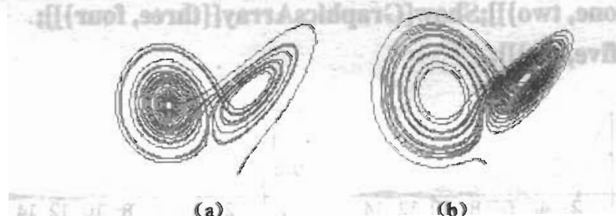
```
Clear[eq, x, y, z]
eq = Sequence[x'[t] == 16*y[t] - 16*x[t], y'[t] == -x[t]*z[t] - y[t] + 45x[t],
     z'[t] == x[t]*y[t] - 4z[t]];
sol1 = NDSolve[{eq, x[0] == 12, y[0] == 4, z[0] == 0}, {x[t], y[t], z[t]}, {t,0, 16},
     MaxSteps -> 10000];
g1 = ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. sol1], {t, 0, 16},
    PlotPoints -> 14400, Boxed -> False, Axes -> None];
```

从图中可以看出洛伦兹微分方程组具有一个奇异吸引子，这个吸引子紧紧地把解的图形“吸”在一起。有趣的是，无论把解的曲线画得多长，这些曲线永不相交。

改变初值为 $x(0)=6, y(0)=-10, z(0)=10$，输入以下 Mathematica 语句，

```
sol2 = NDSolve[{eq, x[0] == 6, y[0] == -10, z[0] == 10}, {x[t], y[t],
     z[t]}, {t, 0, 24}, MaxSteps -> 10000];
g2 = ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. sol2], {t, 0, 24},
    PlotPoints -> 14400, Boxed -> False, Axes -> None];
Show[GraphicsArray[{g1, g2}]];
```

得到数值解的图形如图 10-16（b）。从图中可以看出奇异吸引子又出现了，它把解“吸”在某个区域内，使得所有的解好像是有规则地依某种模式缠绕。



(a) (b)

图 10-16

练习 7 改变初值，并重新计算洛伦兹方程组的数值解，注意观察解曲线的图形特征。

实验 15 试研究非线性微分方程 $\begin{cases}\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+0.50\dfrac{d\theta}{dt}+\sin\theta=0\\ \theta(0)=\theta_0,\theta'(0)=v_0\end{cases}$ 在不同初值条件下的解。

(1) $\theta(0)=i,(i=-1,-0.5,0.5,1),\theta'(0)=0$；

(2) $\theta(0)=0,\theta'(0)=i,(i=-2,-1,1,2)$；

(3) $\theta(0)=1,\theta'(0)=1;\theta(0)=1,\theta'(0)=-1;\theta(0)=-1,\theta'(0)=1;$
$\theta(0)=-1,\theta'(0)=-1$；

(4) $\theta(0)=1,\theta'(0)=2;\theta(0)=1,\theta'(0)=3;\theta(0)=-1,\theta'(0)=4;$
$\theta(0)=-1,\theta'(0)=5$；

(5) $\theta(0)=-1,\theta'(0)=2;\theta(0)=-1,\theta'(0)=3;\theta(0)=1,\theta'(0)=-4;$
$\theta(0)=1,\theta'(0)=-5$。

解：分别将(1)~(5)的初值条件代入微分方程的数值解，并将每一组初值问题的解曲线画在同一坐标系中。输入以下 Mathematica 语句，得到解曲线的图形如图 10-17。其中图 10-17(*f*)是所有初值条件下的解曲线的图形。

```
Clear[eq, s, i];eq = x''[t] + 0.5*x'[t] + Sin[x[t]] == 0;
s[i_, j_] := NDSolve[{eq, x[0] == i, x'[0] == j}, x[t], {t, 0, 15}];table1 = {-1, -0.5, 0.5, 1};
sols1 = Table[s[table1[[i]], 0][[1, 1, 2]], {i, 1, 4}];one = Plot[Evaluate[sols1], {t, 0, 15}];

table2 = {-2, -2, 1, 2};sols2 = Table[s[0, table2[[i]]][[1, 1, 2]], {i, 1, 4}];
two = Plot[Evaluate[sols2], {t, 0, 15}];

table3 = {{1, 1}, {1, -1}, {-1, 1}, {-1, -1}};
sols3 = Table[s[table3[[i, 1]], table3[[i, 2]]][[1, 1, 2]], {i, 1, 4}];
three = Plot[Evaluate[sols3], {t, 0, 15}];table4 = {{1, 2}, {1, 3}, {-1, 4}, {-1, 5}};
sols4 = Table[s[table4[[i, 1]], table4[[i, 2]]][[1, 1, 2]], {i, 1, 4}];
four = Plot[Evaluate[sols4], {t, 0, 15}];table5 = {{-1, 2}, {-1, 3}, {1, -4}, {1, -5}};
sols5 = Table[s[table5[[i, 1]], table5[[i, 2]]][[1, 1, 2]], {i, 1, 4}];
five = Plot[Evaluate[sols5], {t, 0, 15}];six = Show[one, two, three, four, five];
Show[GraphicsArray[{one, two}]];Show[GraphicsArray[{three, four}]];
Show[GraphicsArray[{five, six}]];
```

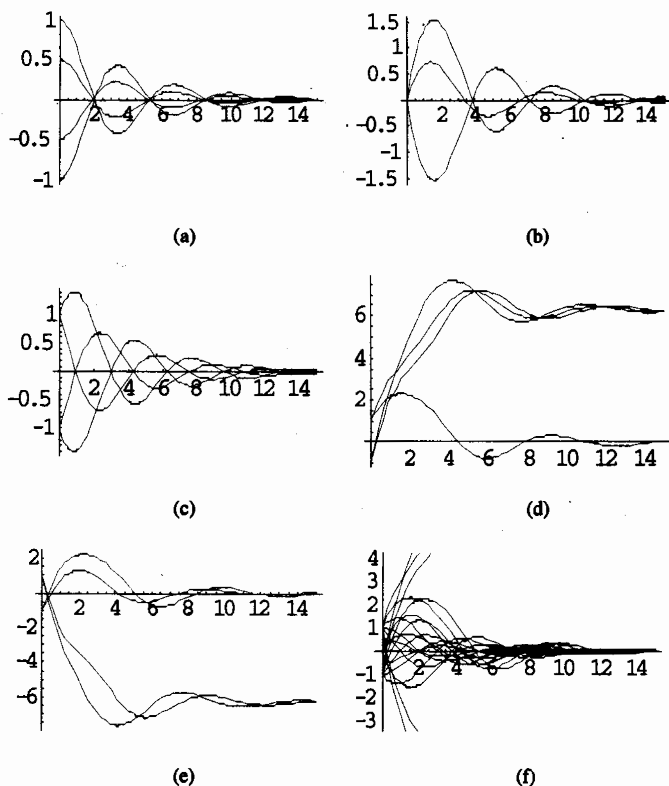


图 10-17

实验 16 （微分方程组的特征向量）画出以下微分方程组

$$\begin{cases} x'(t) = 1.75\,x(t) + 2.17\,y(t) \\ y'(t) = 2.17\,x(t) - 0.75\,y(t) \end{cases}$$

的方向场和特征向量的图形。

解：图形如图 10-18。

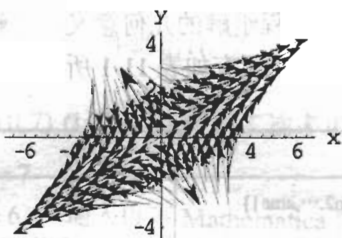


图 10-18

练习 8 试以线性代数的知识解释你所看到的图形。

练习 9 求解实验 16 中的微分方程组，画出其解曲线的图形，并结合图 10-18 作进一步的研究。

实验十一　线性方程组

本实验的目的是理解齐次线性方程组解的几何意义，了解线性方程组的一些应用。

在 Mathematica 中，矩阵的输入主要有如表 11-1 所列形式：

表 11-1

Mathematica 命令	含　义
A= {{a11,a12,…, a1n}} ,…,{am1,am2,…,amn}}	输入矩阵
DiagonalMatrix[{a11,a22,…,ann}]	输入对角元素为 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{mn}$ 的对角矩阵
MatrixForm[m]	以矩阵形式输出矩阵 *M*
IdentityMatrix[n]	产生一个 *n* 阶单位矩阵
Table[0,{m},{n}]	产生一个 $m\times n$ 阶零矩阵
Table[f,{I,m},{j,n}]	产生一个 $m\times n$ 的矩阵

实验 1　输入矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix},A_2=(1,2,3),A_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

解：输入以下 Mathematica 语句：

A1 = {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}

A2 = {{1, 2, 3}}

A3 = {{1}, {2}, {3}}

得到结果为**{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}**；**{{1, 2, 3}}**；**{{1}, {2}, {3}}**

实验 2　求解线性方程组$\begin{pmatrix}-1&3\\4&-12\end{pmatrix}X=0$，并画出$(-1,3)^{\mathrm{T}}$与 X 的图形。

解：输入以下 Mathematica 语句，解得 $X=(3,1)^{\mathrm{T}}$。它们的图形如图 11-1。

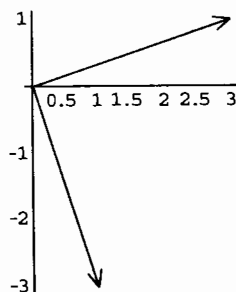


图 11-1

```
Needs["Graphics`Colors`"]
arrow[{a_,b_},color_] := Graphics[{color, Line[{{0,0},{a,b}}],
    Line[{{a,b},.9{a,b}+.04{-b,a}}], Line[{{a,b},.9{a,b}-.04{-b,a}}]}]
A = {{-1,3},{4,-12}};RowReduce[A];x = {1,-3};NullSpace[A]
y = {3,1};
Show[arrow[x,Red],arrow[y,Green], AspectRatio->Automatic, Axes->True];
```

练习 1 求解线性方程$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} X = 0$，并画出$(1,-2)^{\mathrm{T}}$与$X$的图形。观察图形并给出你的结论。

实验 3 求出通过平面上三点$(0,7),(1,6)$和$(2,9)$的二次多项式ax^2+bx+c，并画出其图形。

解：根据条件有$\begin{cases} 0\cdot a+0\cdot b+c=7 \\ 1\cdot a+1\cdot b+c=6 \\ 4\cdot a+2\cdot b+c=9 \end{cases}$，输入以下 Mathematica 的语句：

```
Clear[x];A = {{0,0,1},{1,1,1},{4,2,1}}
y = {7,6,9}
p = LinearSolve[A,y]
Clear[a,b,c,r,s,t];{a,b,c}.{r,s,t}
f[x_] = p.{x^2,x,1};Plot[f[x],{x,0,2}];
Plot[f[x],{x,0,2}, GridLines->Automatic, PlotRange->All];
```

解得$a=2,b=-3,c=7$。画出图形如图 11-2。

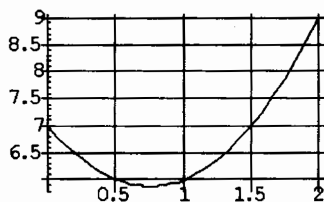


图 11-2

练习 2 求出通过平面上四点$(-2,6),(1,4),(2,3),(3,2)$的 3 次多项式ax^3+bx^2+cx+d，并画出其图形。

实验 4 求出通过平面上三点$(0,0),(1,1),(-1,3)$以及满足$f'(-1)=20,f'(1)=9$的 4 次多项式$f(x)$，并画出其图形。

解：设$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，则有$\begin{cases} e=0 \\ a+b+c+d+e=1 \\ a-b+c-d+e=3 \\ -4a+3b-2c+d=20 \\ 4a+3b+2c+d=9 \end{cases}$。输入以下 Mathematica 语句：

```
Clear[a,b,c,d,e]; q[x_] = a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e;
eqs = {q[0]==0,q[1]==1,q[-1]==3,q'[-1]==20,q'[1]==9};
```

```
{A, y} = LinearEquationsToMatrices[eqs, {a, b, c, d, e}];
p = LinearSolve[A,y];f[x_] = p.{x^4,x^3,x^2,x,1};
Plot[f[x],{x,-1,1}, GridLines->Automatic, PlotRange->All];
```

解得 $f(x)=-\frac{19}{4}x^4+\frac{31}{4}x^3+\frac{27}{4}x^2-\frac{35}{4}x$，其图形如图 11-3。

实验 5 给定数据点 $(0.7,4.0),(3.3,4.7),(5.6,4.0),(7.1,1.3)$，$(6.4,-1.1),(4.4,-3.0)$，$(0.3,-2.5)$，$(-1.1,1.3)$。试找出一个圆，这些数据点使尽可能落在该圆上。

解：输入以下 Mathematica 语句

```
xs = {0.7, 3.3, 5.6, 7.1, 6.4, 4.4, 0.3,-1.1};ys = {4.0, 4.7, 4.0, 1.3,-1.1,-3.0,-2.5, 1.3};
pts = Transpose[{xs,ys}];
Show[Graphics[{Red, AbsolutePointSize[5], Map[Point, pts],Violet, Circle[{3,1},3.5] }],
    Axes->Automatic, AspectRatio->Automatic];
```

得到图形如图 11-4。

从图 11-4 中看出拟合效果并不好。下面我们介绍一种最小二乘法。

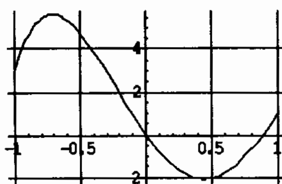


图 11-3

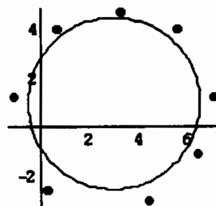


图 11-4

设圆的中心在 (c_1,c_2)，半径为 r，则圆的方程为 $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$，即

$$2xc_1+2yc_2+(r^2-c_1^{\ 2}-c_2^{\ 2})=x^2+y^2 \tag{11-1}$$

令 $c_3=r^2-c_1^{\ 2}-c_2^{\ 2}$，由（11-1）式就得到关于三个未知数 c_1,c_2,c_3 的线性方程组

$$2xc_1+2yc_2+c_3=x^2+y^2$$

将实验 5 中的数据点代入方程，得到以下的线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_8 & 2y_8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2} \\ x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2} \\ \vdots \\ x_8^{\ 2}+y_8^{\ 2} \end{pmatrix}$$

这是一个关于 3 个未知数，8 个方程的方程组，我们令左边的系数矩阵为 A，右端向量为 b，则方程组的最小二乘解即为求解方程组 $A^{\mathrm{T}}A\hat{X}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$，输入以下 Mathematica 语句：

```
matA = Transpose[{2xs, 2ys, Table[1, {Length[xs]}]}];vecb = xs^2 + ys^2;
{c1,c2,c3} = LinearSolve[Transpose[matA].matA, Transpose[matA].vecb]
r = Sqrt[c3 + c1^2 + c2^2]
xs = {0.7, 3.3, 5.6, 7.1, 6.4, 4.4, 0.3,-1.1}; ys = {4.0, 4.7, 4.0, 1.3,-1.1,-3.0,-2.5, 1.3};
pts = Transpose[{xs,ys}];
```

```
Show[Graphics[{Red, AbsolutePointSize[5], Map[Point, pts],Violet, Circle[{c1,c2},r]}],
    Axes->Automatic, AspectRatio->Automatic];
Print["center: (",c1,", ",c2,");   radius: ",r];s = Sqrt[(xs - c1)^2 + (ys - c2)^2]
e = s – r;d = Sqrt[e.e]
deviation[{a_,b_}, rad_] := Module[{e},
        e = Sqrt[(xs - a)^2 + (ys - b)^2] - rad; Sqrt[e.e] ]
deviation[{c1,c2},r]
deviation[{3,1},3.5]
```

解得 $(c_1,c_2)\approx(2.95,0.74), r\approx4.07$。画出图形如图 11-5。

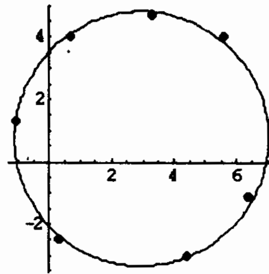


图 11-5

练习 3 给定数据点 (3.3,1.2),(2.0,3.1),(−3.0,2.6), (−0.8,0.2)， (1.4,−1.0), (3.0,0.7)，试用最小二乘法作出一个圆来拟合这些数据。

实验十二　几何变换与特征向量

本实验的目的是从几何直观上理解线性变换与特征向量的几何意义。

12.1　几何变换

几何变换是计算机图形学中的基础技术，有着广泛的应用。平面上常见的变换有：

(1) 按逆时针方向旋转α角的旋转变换，变换矩阵为 $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$；

(2) 比例系数为 s_x，s_y 的比例变换 $A=\begin{pmatrix}s_x & 0\\ 0 & s_y\end{pmatrix}$；

(3) 关于 x 轴的对称的线性变换 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$；

(4) 关于直线 $y=x$ 对称的变换 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$；

(5) 任意一个线性变换 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$。

实验 1　对正方形进行一系列线性变换。设初始正方形顶点坐标为

$$P_1(-1,-1), P_2(1,-1), P_3(1,1), P_4(-1,1)$$

分别对该正方形进行以下变换，并观察变换结果。

(1) 对正方形进行旋转变换；

(2) 对正方形进行任意一个线性变换；

(3) 对正方形进行旋转和伸缩变换，令正方形围绕其中心点旋转且放大，得到一组正方形，使得每个后面的正方形包含前一个正方形。

解：对正方形进行变换，只需对正方形的四个顶点进行变换，在将四个顶点变换后的像按顺序连接即可。

设第 i 个顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)$，则变换后其像的坐标为 $(x_i',y_i')=(x_i,y_i)A$。取不同的变换矩阵 A，就可以实现不同的变换。

(1) 对正方形进行旋转变换。令 $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$，$\alpha=\dfrac{\pi}{16}$，将正方形连旋转 6 次。图形见图 12-1。

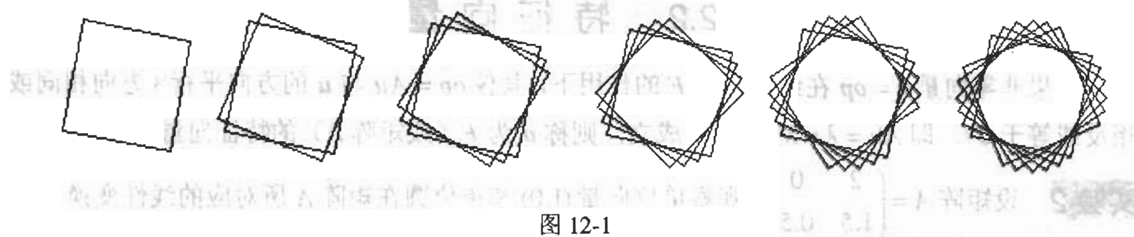


图 12-1

(2) 对正方形进行任意一个线性变换。令 $A=\begin{pmatrix}1.2i & 2\\ 3 & 1.2i\end{pmatrix}$，$i=0,1,2,\cdots,10$, 对正方形进行10 次变换。所得图形（部分图形）如图 12-2。

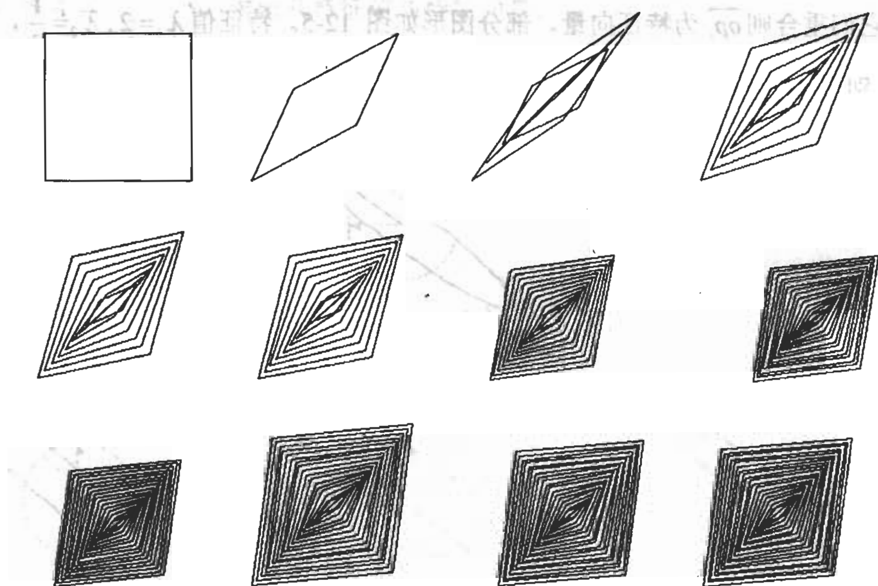


图 12-2

(3) 对正方形进行旋转和伸缩变换，令 $A_1=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{pmatrix}$，$A=A_1A_2$，要使每个后继正方形正方包含前一个，取伸缩系数为 $s=\cos\alpha+\sin\alpha$。取 $\alpha=\dfrac{\pi}{30}$，共变换 20 次，所得图形如图 12-3。

图 12-3

练习 1 改变以上实验中参数值，实现对正方形的其它形式的变换，观察图形，总结出规律。

12.2 特征向量

如果非零向量$u=\overrightarrow{op}$在线性变换F的作用下，其像$\overrightarrow{op}=Au$与u的方向平行（方向相同或相反或等于0），即$Au=\lambda u$对某数λ成立，则称u为F（或矩阵A）的特征向量。

实验2 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\1.5 & 0.5\end{pmatrix}$，观察单位向量(1,0)和单位圆在矩阵$A$所对应的线性变换$F$下的像。并观察特征向量的几何意义。

解：单位向量和单位圆在线性变换F下的像的图形如图12-4。取P_i为单位圆上的点，坐标为$(\cos\frac{i}{36}\pi,\sin\frac{i}{36}\pi)$，$i=0,1,\cdots,36$，则其像$P_i'$的坐标为$(x_i',y_i')=(\cos\frac{i}{36}\pi,\sin\frac{i}{36}\pi)A$，连接$\overrightarrow{op_i}$与$\overrightarrow{op_i'}$，若它们重合则$\overrightarrow{op_i}$为特征向量。部分图形如图12-5。特征值$\lambda_1=2$，$\lambda_2=\frac{1}{2}$，所对应的特征向量分别为$(0.707107,0.707107)^T,(0,1)^T$，图形如图12-6。

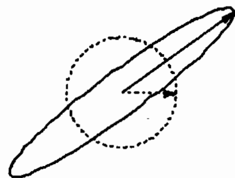


图 12-4

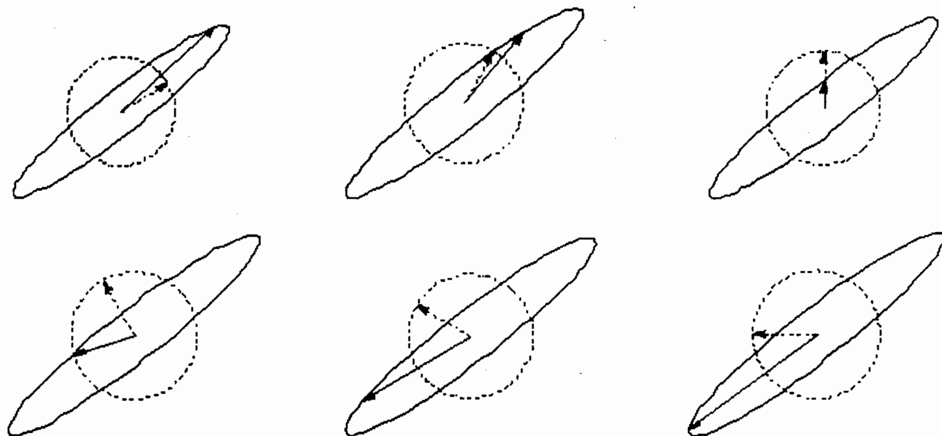


图 12-5

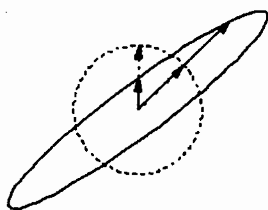


图 12-6

练习 2　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$，求出其特征值与特征向量，并观察特征向量的图形，从中你能得出什么结论？

实验 3　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，求出其特征值与特征向量。

解：输入以下 Mathematica 语句，求得特征值为 $1-i,1+i$，特征向量为 $(-i,1)^{\mathrm{T}},(i,1)^{\mathrm{T}}$，部分图形如图 12-7、12-8。

```
A = {{1, -1}, {1, 1}};Eigenvalues[A]
Eigenvectors[A]
```

练习 3　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$，求出其特征值与特征向量。

实验 4　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，分别求出 A、$A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值与特征向量，画出 A 与 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征向量在线性变换 A 下的像。

解：图形如图 12-9、图 12-10。

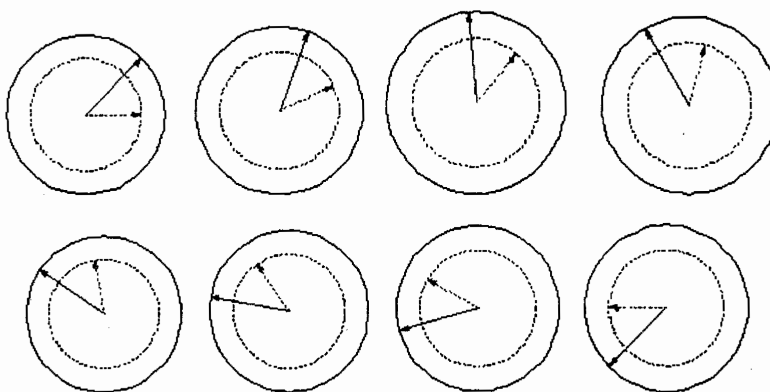


图 12-7

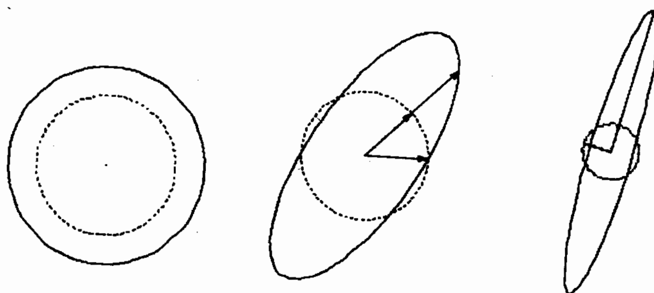


图 12-8　　　　图 12-9

练习 4　从实验 4 中你能得出 A 与 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值、特征向量有什么关系吗？

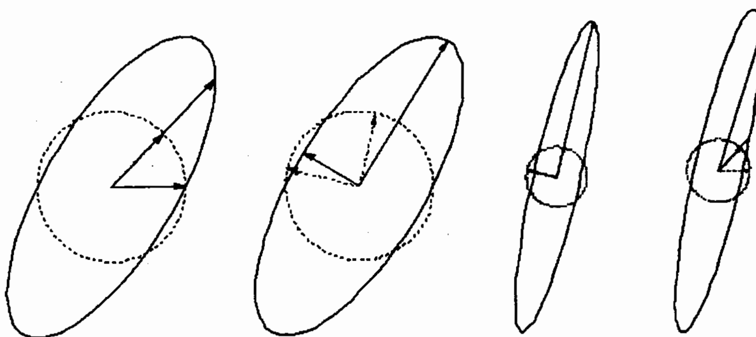


图 12-10

附　实验 1 的 Mathematica 程序

```
Clear[tt, x1, y1, x2, y2, x3, x4, y3, y4, v1, v2, v3, v4, g1, x10, y10, x20,
    y20, x30, y30, x40, y40];
x10 = -1; y10 = -1; x20 = 1; y20 = -1; x30 = 1; y30 = 1; x40 = -1; y40 = 1; a = Pi/16;
tt = {{Cos[a], -Sin[a]}, {Sin[a], Cos[a]}};g1 = {};
For[i = 1, i <= 6, i++,
  v1 = N[{x10, y10}.tt]; v2 = N[{x20, y20}.tt]; v3 = N[{x30, y30}.tt];
  v4 = N[{x40, y40}.tt]; x1 = Part[v1, 1]; y1 = Part[v1, 2];
  x2 = Part[v2, 1]; y2 = Part[v2, 2]; x3 = Part[v3, 1]; y3 = Part[v3, 2];
  x4 = Part[v4, 1]; y4 = Part[v4, 2];
  g1 = Append[g1, Graphics[Line[{{x1, y1}, {x2, y2}, {x3, y3}, {x4, y4}, {x1, y1}}],
                    AspectRatio -> 1, PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}}]];
  x10 = x1; y10 = y1; x20 = x2; y20 = y2; x30 = x3; y30 = y3; x40 = x4; y40 = y4;
  Show[g1]]
x10 = -1; y10 = -1; x20 = 1; y20 = -1; x30 = 1; y30 = 1; x40 = -1; y40 = 1; g1 = {};
Show[Graphics[Line[{{x10, y10}, {x20, y20}, {x30, y30}, {x40, y40}, {x10, y10}}],
          AspectRatio -> 1]];
For[i = 1, i <= 20, i++, tt = {{1.2*i, 2}, {3, 1.2*i}}; v1 = N[{x10, y10}.tt];
    v2 = N[{x20, y20}.tt]; v3 = N[{x30, y30}.tt]; v4 = N[{x40, y40}.tt];
    x1 = Part[v1, 1]; y1 = Part[v1, 2]; x2 = Part[v2, 1]; y2 = Part[v2, 2];
    x3 = Part[v3, 1]; y3 = Part[v3, 2]; x4 = Part[v4, 1]; y4 = Part[v4, 2];
  g1 = Append[g1, Graphics[Line[{{x1, y1}, {x2, y2}, {x3, y3}, {x4, y4}, {x1, y1}}],
                    AspectRatio -> 1]]; Show[g1]]
x10 = -1; y10 = -1; x20 = 1; y20 = -1; x30 = 1; y30 = 1; x40 = -1; y40 = 1; a= Pi/30;
s = Sin[a] + Cos[a];t1 = {{Cos[a], -Sin[a]}, {Sin[a], Cos[a]}};t2 = {{s, 0}, {0, s}};
tt = N[t1.t2]; g1 = {};
For[i = 1, i <= 20, i++,
  v1 = N[{x10, y10}.tt]; v2 = N[{x20, y20}.tt]; v3 = N[{x30, y30}.tt];
  v4 = N[{x40, y40}.tt]; x1 = Part[v1, 1]; y1 = Part[v1, 2];
```

```
x2 = Part[v2, 1]; y2 = Part[v2, 2]; x3 = Part[v3, 1]; y3 = Part[v3, 2];
x4 = Part[v4, 1]; y4 = Part[v4, 2]; g1 = Append[g1,
    Graphics[Line[{{x1, y1}, {x2, y2}, {x3, y3}, {x4, y4}, {x1, y1}}],
            AspectRatio -> 1, PlotRange -> {{-10, 10}, {-10, 10}}]];
x10 = x1; y10 = y1; x20 = x2; y20 = y2; x30 = x3; y30 = y3; x40 = x4; y40 = y4;
    Show[g1]]
```

实验十三　复变函数

本实验的目的是进一步理解复变函数以及复变函数的极限与连续性的概念。

13.1 复变函数

设 G 是复平面上一个点集，若对 G 中每一点 $z=x+\mathrm{i}y$，按照一定的法则，都有复数 $w=u+\mathrm{i}v$ 与之对应，则称 w 是 z 的复变函数，记为

$$w=f(z)$$

由于 $w=f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=u+\mathrm{i}v$，所以一个复变复值函数相当于两个二元实变函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，故对复变函数 $w=f(z)$ 的研究可以转化为对一对二元函数的研究。

因为复变函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v=f(x+\mathrm{i}y)$ 涉及四个实变数 x,y,u,v，故不能用一个平面，也不能用一个三维空间中的几何图形表示，但我们可利用两张复平面：z 平面和 w 平面的点集间的对应关系表示，我们称之为映射或变换。

实验 1　将函数 $f(z)=z^4$ 表示成 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的形式，并分别给出单位正方形区域和 $|z-\frac{1+\mathrm{i}}{2}|<\frac{1}{2}$ 在 w 平面上的像。

解：$f(z)=f(x,y)=x^4-6x^2y^2+y^4+\mathrm{i}(4x^3y-4xy^3)$，单位正方形区域在 w 平面上的像见图 13-1，区域 $|z-\frac{1+\mathrm{i}}{2}|<\frac{1}{2}$ 在 w 平面上的像如图 13-2。

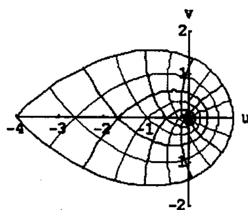


图 13-1

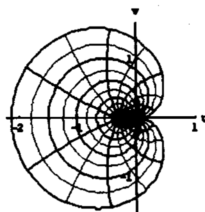


图 13-2

实验 2　设函数 $f(z)=z^5+4z^2-6$，分别画出单位正方形区域和 $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$ 在 w 平面上的像。

解：单位正方形区域在 w 平面上的像见图 13-3，区域 $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$ 在 w 平面上的像如图 13-4。

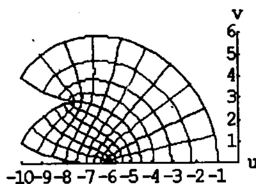


图 13-3

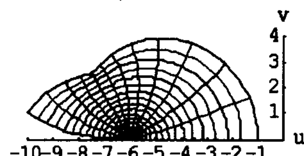


图 13-4

练习 1 已知映射 $w=z^3$，试画出单位正方形区域和 $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$ 在 w 平面上的像。

设 α 为一实数，则 $w=ze^{i\alpha}=r\,e^{i(\theta+\alpha)}$ 是 z 平面到 w 平面上的一个一对一映射，称之为旋转。

实验 3 将椭圆 $s(t)=2\cos t+i\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，旋转 $\frac{\pi}{6}$ 并将中心分别右移 2 个单位和上移 1 个单位。

解：椭圆在上述操作下的方程可表示为 $r(t)=s(t)\cdot e^{i\frac{\pi}{6}}+(2+i)$ 变换的图形如图 13-5。

实验 4 设 $w=(3-4i)z+6+2i$，求出区域 $|z+1+i|<1$ 在 w 平面上的像。

解：区域 $|z+1+i|<1$ 在映射 $w=(3-4i)z+6+2i$ 下的像为 $|w+1-3i|<5$ 图形如图 13-6。

练习 2 设 $w=(-1+i)z-2+3i$，求出区域 $\mathrm{Re}(z)>1$ 在 w 平面上的像。

实验 5 设 $w=\frac{1}{z}$，求出右半平面 $\mathrm{Re}(z)>\frac{1}{2}$ 在 w 平面上的像。

解：右半平面在映射 $w=\frac{1}{z}$ 下的像为 $|w-1|<1$。图形如图 13-7。

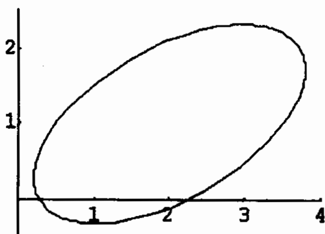


图 13-5

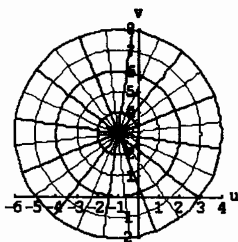


图 13-6

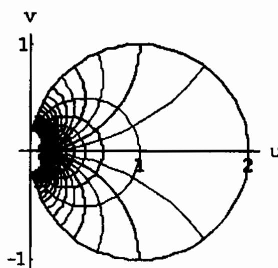


图 13-7

练习 3 设 $w=\frac{1}{z}$。求出 $(a)\ x=a$；$(b)\ x=b$ 在 w 平面上的像。

13.2 复变函数的极限与连续性

设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 点的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义，若任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0\ (0<\delta\leqslant\rho)$，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，记为 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$。若 $f(z)$ 在 z_0 点有定义，且 $f(z_0)=A$，则称在 $f(z)$ 点 z_0 连续。若 $f(z)$ 在区域 G 内每一点都连续，则称 $f(z)$ 在区域 G 内连续。

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y), A=u_0+iv_0, z_0=x_0+iy_0$，则

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=u_0\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=v_0\end{cases}$$

由此可见，复数函数的极限实质上相当于二元实函数的极限。

实验 6 从图形观察 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2x^3}{x^2+y^2}=0$。

解：输入以下 Mathematica 语句，图形如图 13-8。

```
Needs["Graphics`ComplexMap`"]; Needs["Graphics`ImplicitPlot`"];
Needs["Graphics`Colors`"]; Needs["Algebra`InequalitySolve`"];
u[x_, y_] = 2 x^3/(x^2 + y^2); cont = {-0.8, -0.4, -0.2, -0.1, -0.05, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8};
ContourPlot[u[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, Contours -> cont,PlotPoints -> 50,
        ColorFunction -> Hue];
```

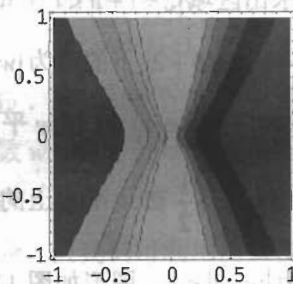


图 13-8

从图中可看出等高线越来越接近原点(0,0)。

实验 7 从图形观察 $u(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 极限不存在。

解：图形如图 13-9。从图中可看出，不同的方向趋向于不同的值。

练习 4 从图形观察 $f(z)=\dfrac{1}{2\,\mathrm{i}}(\dfrac{z}{\overline{z}}-\dfrac{\overline{z}}{z}),z\neq0$ 当 $z\to0$ 时的极限不存在。

实验 8 从图形观察 $\lim\limits_{z\to1+\mathrm{i}}(z^2-2z+1)=-1$。

解：图形如图 13-10。从图中可以看出 $z=1+\mathrm{i}$ 的邻域在映射 $w=z^2+2z+1$ 下的像，当 $z\to1+\mathrm{i}$ 时 $w\to-1$。

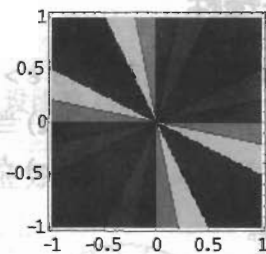


图 13-9

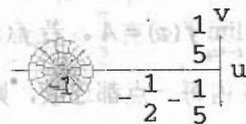


图 13-10

实验 9 观察多项式 $P(z)=1-z-z^2+z^3-z^4+z^5$ 在点 $z_0=1$ 处的连续性。

解：图形如图 3-11。从图中可看出 $z=1$ 的邻域在映射 $w=1-z-z^2+z^3-z^4+z^5$ 下的像 $z\to1$ 时 $w\to-1$。

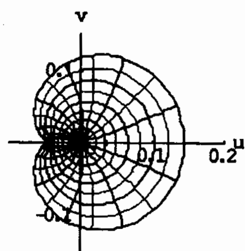


图 13-11

练习 5 观察多项式 $P(z)=-1+11z-3z^2-4z^3-3z^4+2z^5$ 在点 $z_0=-1+i$ 处的连续。

实验十四 级 数

本实验的目的是进一步加深对复变函数中级数概念的理解。

14.1 复数项级数

14.1.1 复数列与复级数

设有复数列$\{\alpha_n\}=\{a_n+\mathrm{i}b_n\},(n=1,2,\cdots)$，表达式$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\cdots$称为复数项级数。$S_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$称为级数的部分和。如果部分和数列$\{S_n\}$收敛，那么称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛，且称极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$为级数的和，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=S$。否则，称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$发散。

实验 1 观察数列$\{\alpha_n\}=\left\{\dfrac{\sqrt{n}+\mathrm{i}(n+1)}{n}\right\}$的变化趋势。

解：输入以下 Mathematica 语句，画出数列的散点图如图 14-1。

```
Needs["Graphics`ComplexMap`"];Needs["Graphics`Colors`"];
set = Table[{N[Sqrt[n]/n], N[1/n + 1]}, {n, 1, 50}];
dot = Graphics[{PointSize[0.025], Magenta, Point[{0, 1}]}];
gr = ListPlot[set, Prolog -> {PointSize[0.02], Green},
    PlotRange -> {{0.0, 1.0}, {0.0, 2.0}}, AxesLabel -> {"x", "y"},
    Ticks -> {Range[ 0, 1, 1/2], Range[0, 2, 1/2]}]; Show[gr, dot]
```

从图中可以看到数列越来越接近于 i。然而实部趋近于 0 的速度比虚部趋向于 i 的速度要慢。

实验 2 观察数列$\{\alpha_n\}=\left\{(1+i)^n\right\}$的变化趋势。

解：数列的散点图如图 14-2。从图中可以看到数列是发散的。

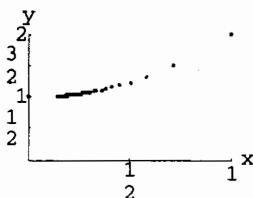


图 14-1

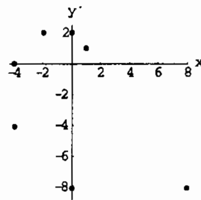


图 14-2

练习 1　观察下列数列$\{\alpha_n\}$的变化趋势。

(1) $\alpha_n=\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{-n}$；(2) $\alpha_n=(-1)^n+\frac{\mathrm{i}}{n+1}$；(3) $\alpha_n=\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{2}\mathrm{i}}$；(4) $\alpha_n=\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{2}\mathrm{i}}$。

实验 3　观察级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\mathrm{i}n(-1)^n}{n^2}$的敛散性。

解：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\mathrm{i}n(-1)^n}{n^2}$的部分和数列散点图如图 14-3。从图中可以看到级数收敛。

练习 2　观察级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\mathrm{i}}{n}$的敛散性。

实验 4　观察级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4\mathrm{i})^n}{5^n\cdot n^2}$的敛散性。

解：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4\mathrm{i})^n}{5^n\cdot n^2}$的部分和数列散点图如图 14-4。从图中可以看到级数收敛，并且是绝对收敛的。

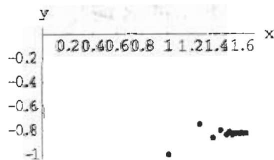


图 14-3

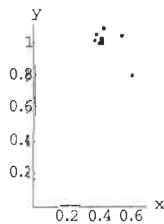


图 14-4

练习 3　观察下列级数的敛散性。

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{\ln n}$；　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos \mathrm{i}n}{2^n}$。

14.1.2　复数列的迭代

给定一个复变函数$f(z)$和一个复数z_0，令

$$z_1=f(z_0),z_2=f(z_1),\cdots,z_{k+1}=f(z_k)$$

由此生成复数列$\{z_k\}$，称为复数列的迭代。

实验 5　观察由$f(z)=z^2+\mathrm{i}$所生成的复数列$\{z_k\}$的图形。

解：图形如图 14-5。

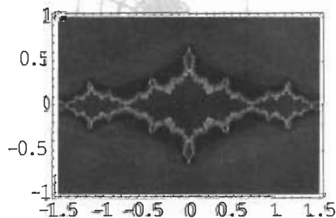


图 14-5

练习 4　任给一个函数$f(z)$，观察由$f(z)$所生成的复数列$\{z_k\}$的图形。

14.2　几何级数

级数$\sum_{n=0}^{\infty}z^n$称为几何级数。当$|z|<1$时，$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$；当$|z|\geqslant 1$时，级数发散。

实验 6 观察级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\mathrm{i})^n}{2^n}$的敛散性。

解：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\mathrm{i})^n}{2^n}=1-\mathrm{i}$,部分和数列的散点图如图 14-6。

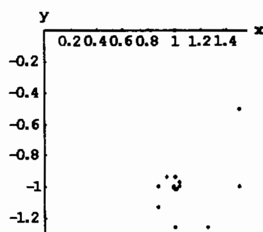


图 14-6

练习 5 观察级数$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{2^n}$的敛散性。

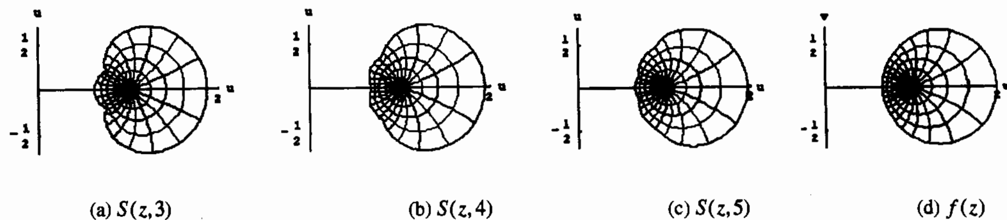
实验 7 观察级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{2^n}$在$|z-\mathrm{i}|<2$内的敛散性。

解：由比值判敛法，级数在$|z-\mathrm{i}|<2$内收敛。我们可以在更小的区域$|z-\mathrm{i}|<1$内研究它的部分和，给出它的部分和的图形如图 14-7。

$$s(z,3)=\sum_{n=0}^{3}\frac{(1-\mathrm{i})^n}{2^n}=\frac{(z-\mathrm{i})^4-16}{8[z-(2+\mathrm{i})]}\text{；}\quad s(z,4)=\sum_{n=0}^{4}\frac{(1-\mathrm{i})^n}{2^n}=\frac{(z-\mathrm{i})^5-32}{16[z-(2+\mathrm{i})]}$$

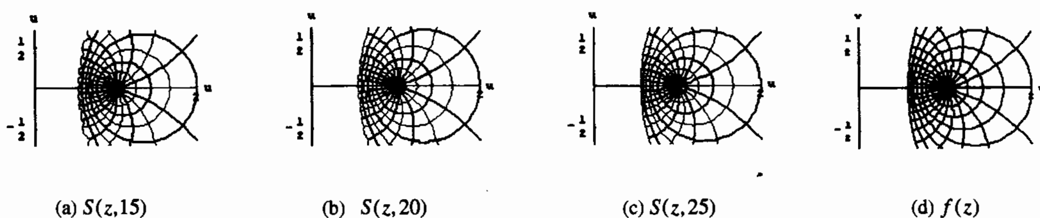
$$s(z,5)=\sum_{n=0}^{5}\frac{(1-\mathrm{i})^n}{2^n}=\frac{(z-\mathrm{i})^6-64}{32[z-(2+\mathrm{i})]};f(z)=-\frac{2}{z-(2+\mathrm{i})}$$

同时在$|z-\mathrm{i}|<1.6$内研究它的部分和，图形如图 14-8。



(a) $S(z,3)$ (b) $S(z,4)$ (c) $S(z,5)$ (d) $f(z)$

图 14-7



(a) $S(z,15)$ (b) $S(z,20)$ (c) $S(z,25)$ (d) $f(z)$

图 14-8

比较图 14-7 和图 14-8，可以发现收敛范围越小收敛速度越快。

14.3 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n = C_0 + C_1(z-a) + \cdots + C_n(z-a)^n \text{ 或}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = C_0 + C_1 z + \cdots + C_n z^n + \cdots$$

以上两式都称为幂级数。幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在收敛圆 $|z| = R$ 内不仅收敛，而且绝对收敛；在收敛圆外发散，在收敛圆 $|z| = R$ 上则不一定。

实验 8 求出幂级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^n (z-4)^n$ 的收敛半径，并观察其在收敛圆内的收敛性。

解：幂级数在 $|z-4| < 3$ 内收敛。画出幂级数在 $|z-4| < 1$ 内部分和的图形如图 14-9。

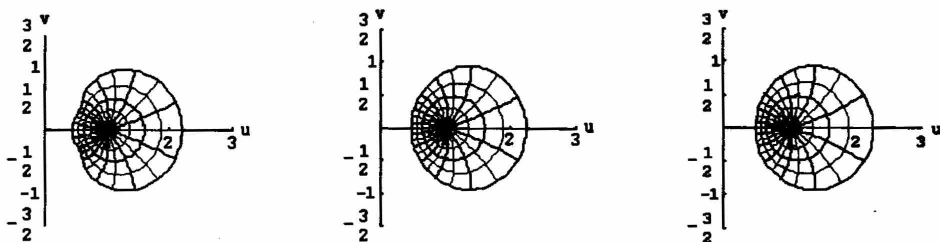


图 14-9 （从左至右依次为 $S(z,3)$，$S(z,4)$，$S(z,5)$ 的图形）

从图 14-9 中可看出在 $|z-4| < 1 < 3$ 内幂级数是收敛的。

练习 6 求出幂级数 $f(z) = 1 + 4z + 5^2 z^2 + 4^3 z^3 + 5^4 z^4 + 4^5 z^5 + 5^6 z^6 + \cdots$ 的收敛半径，并观察 $f(z)$ 在收敛圆内的收敛性。

实验 9 求出幂级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径，并观察其收敛性。

解：幂级数 $f(z)$ 的收敛半径 ∞。画出幂级数在 $|z| < 1$ 内部分和的图形如图 14-10。

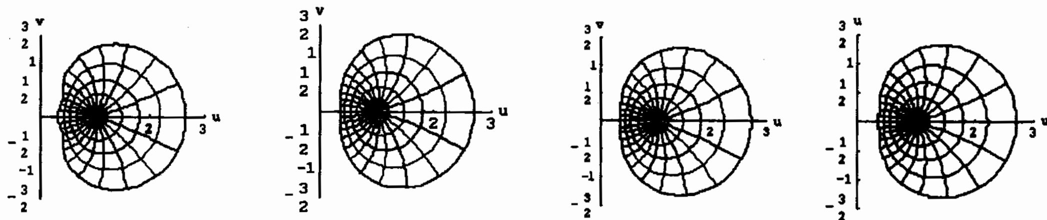


图 14-10 （从左至右依次为 $S(z,3)$，$S(z,4)$，$S(z,5)$，$f(z)$ 的图形）

从图 14-10 中可以看出幂级数是收敛的。

14.4 泰勒级数

若级数 $f(z)$ 在圆 $|z-z_0|=R$ 内解析，则在此圆内 $f(z)$ 可展成幂级数，

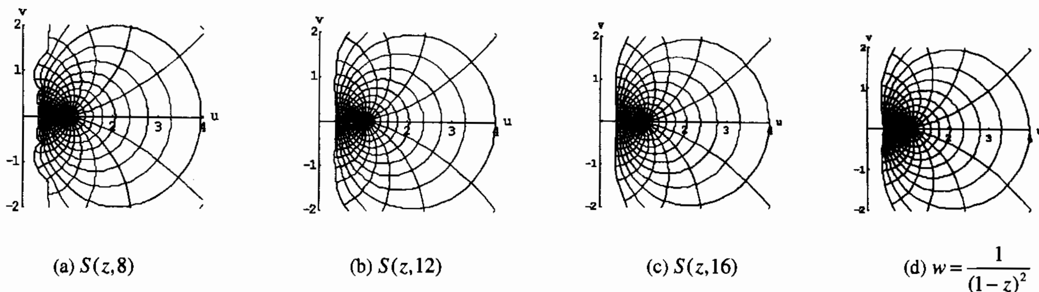
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{14-1}$$

称为泰勒级数，其中 $c_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$ 称为泰勒系数。

任何解析函数展开成幂级数的结果就是泰勒级数，因而展开式（14-1）具有唯一性。

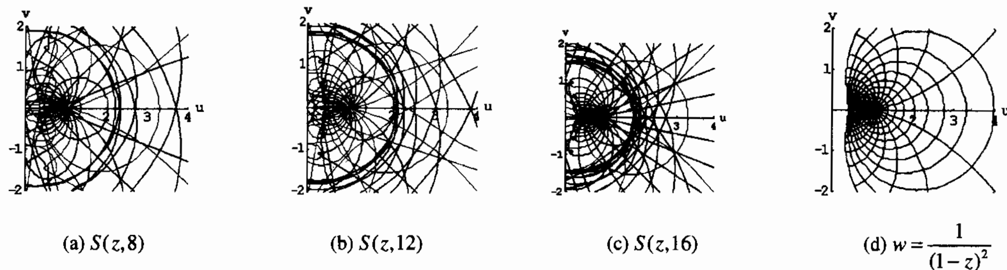
实验 10 观察 $\dfrac{1}{(1-z)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 在 $|z|<1$ 内成立。

解：我们分别画出 $\dfrac{1}{(1-z)^2}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的部分和在 $|z|<r$ 内的图形，其中 $r=0.6$，1.2。$\dfrac{1}{(1-z)^2}$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的部分和在 $|z|<0.6$ 内的图形如图 14-11，在 $|z|<1.2$ 内的图形如图 14-12。从图 14-11 和图 14-12 中可以看出前者收敛，后者不收敛，也即 $\dfrac{1}{(1-z)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 在 $|z|<1$ 内成立。



(a) $S(z,8)$ (b) $S(z,12)$ (c) $S(z,16)$ (d) $w=\dfrac{1}{(1-z)^2}$

图 14-11



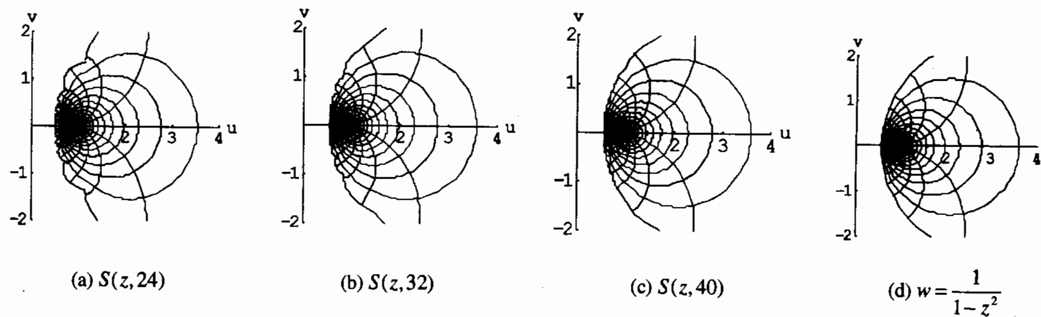
(a) $S(z,8)$ (b) $S(z,12)$ (c) $S(z,16)$ (d) $w=\dfrac{1}{(1-z)^2}$

图 14-12

练习 7 改变 r 值和部分和的项数，重做实验 10，并说明为什么选取在 $|z|<0.6$ 的区域内作部分和图形。

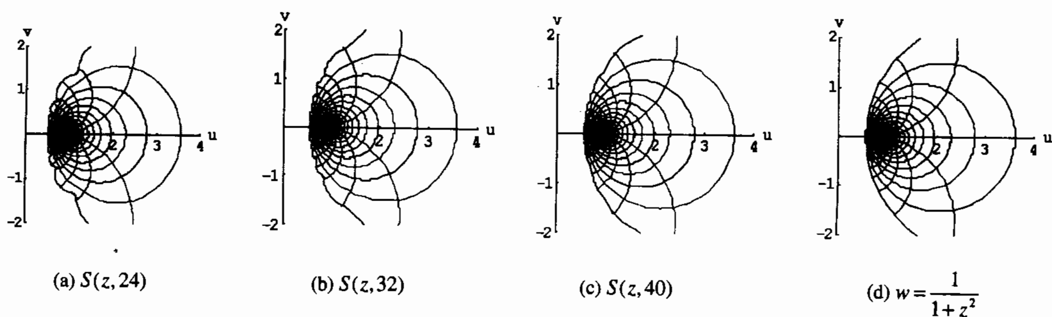
实验 11 观察（a）$\dfrac{1}{1-z^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{2n}$ 和（b）$\dfrac{1}{1+z^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$ 在 $|z|<1$ 内的收敛性。

解：我们在区域 $\mathrm{Im}(z)>0$ 和 $|z|<0.9$ 内分别画出级数 $\dfrac{1}{1-z^2}$, $\dfrac{1}{1+z^2}$ 部分和的图形如图 14-13，图 14-14。从图中可以看出它们均收敛。



(a) $S(z,24)$　(b) $S(z,32)$　(c) $S(z,40)$　(d) $w=\dfrac{1}{1-z^2}$

图 14-13



(a) $S(z,24)$　(b) $S(z,32)$　(c) $S(z,40)$　(d) $w=\dfrac{1}{1+z^2}$

图 14-14

练习 8　为什么 $f_1(z)=\dfrac{1}{1-z^2}$ 与 $f_2(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 的图形相同？

练习 9　改变部分和的项数或区域，重做实验 11。

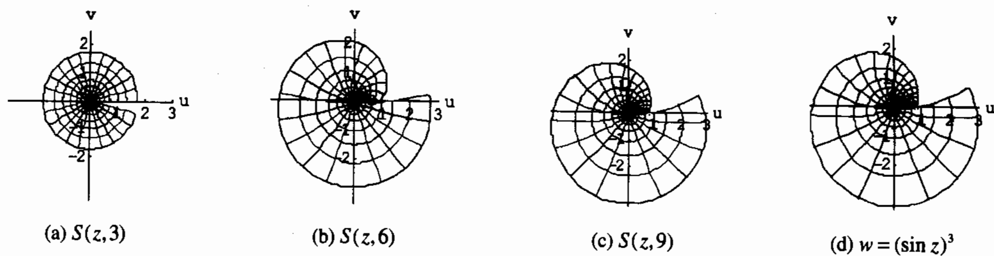
实验 12　求出 $f(z)=(\sin z)^3$ 的泰勒级数，并画出部分和在区域 $|z|<1.2$ 和 $0<\arg z<\dfrac{23}{36}\pi$ 内的图形。

解：$\sin z = z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots, |z|<\infty$，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3}{4(2n+1)!}\cdot z^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(-1)^n 3\cdot 9^n}{4(2n+1)!}\cdot z^{2n+1}$$

$$=\frac{3}{4}\sin z-\frac{1}{4}\sin 3z \neq \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^3=(\sin z)^3$$

画出其部分和图形见图 14-15。



(a) $S(z,3)$　(b) $S(z,6)$　(c) $S(z,9)$　(d) $w=(\sin z)^3$

图 14-15

练习 10 改变部分和的项数或区域，重做实验 12。

14.5 洛朗级数

在圆 $|z-z_0|<R$ 内解析的函数 $f(z)$ 可以展成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$，设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内处处解析，则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{14-2}$$

其中 $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，$C$ 为圆环域内绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线。

式（14-2）称为函数 $f(z)$ 在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R$ 内的洛朗展开式，右端的级数称为 $f(z)$ 在此圆环域内的洛朗级数。

一个在某一圆环域内解析的函数展开为含有正、负幂项的级数是唯一的，这个级数就是 $f(z)$ 的洛朗级数。

实验 13 在 $|z|>0$ 区域内将 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^z}{z^3}$ 展开。

解：$f(z)=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\frac{z^2}{5!}+\frac{z^3}{6!}+\cdots$，作出当 $z=x$ 为实数时的部分和图形如图 14-16，作出 $f(z)$ 在 $|z-1|<0.999$ 区域内的部分和图形如图 14-17。

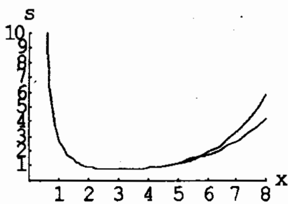


图 14-16

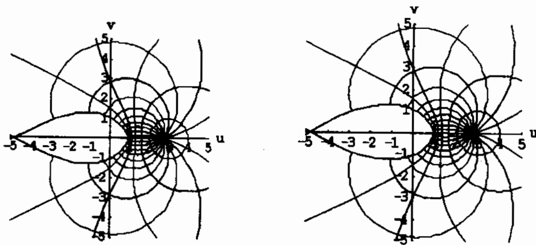


图 14-17

从图中可看出 $f(z)$ 的洛朗级数具有很好的收敛性质。

实验 14 研究函数 $f(z)=\frac{3}{2+z-z^2}$ 的洛朗级数展开。

解：下面讨论 $f(z)=\frac{3}{2+z-z^2}$ 的三种不同的洛朗级数形式：

$$f(z)=\frac{1}{1+z}+\frac{1}{2-z}$$

令 $f_1(z)=\frac{1}{1+z}, f_2(z)=\frac{1}{2-z}$，则

$$f_1(z)=\begin{cases}s_{11}(z),|z|<1\\ s_{12}(z),|z|>1\end{cases},\ f_2(z)=\begin{cases}s_{21}(z),|z|<2\\ s_{22}(z),|z|>2\end{cases}$$

其中

$$s_{11}(z)=1-z+z^2-z^3+z^4-\cdots,\quad |z|<1$$

$$s_{12}(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\cdots,\quad |z|>1$$

$$s_{21}(z)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\cdots\right),\quad |z|<2$$

$$s_{22}(z)=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{8}{z^3}+\cdots\right),\quad |z|>2$$

(1) 在$0<|z|<1$内

$$L_1(z)=s_{11}(z)+s_{21}(z)=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}z+\frac{9}{8}z^2-\frac{15}{16}z^3+\frac{33}{32}z^4-\cdots,$$

令$s(x)=\dfrac{3}{2+x-x^2},s_1=L_1(x)$，作出$s(x)$和$L_1(x)$的图形如图 14-18。

从图中可以看出在$0<x<1$内$L_1(x)$收敛于$s(x)$。对于复平面上，我们需要选择接近于$z=0$的圆盘，我们不妨选取$|z|<0.6$，分别作$f(z)$和$L_1(z)$的部分和图形如图 14-19，从图 14-19 中我们看到$L_1(z)$收敛于$f(z)$。

若我们选择$|z|<0.9$，作出$L_1(z)$的部分和图形如图 14-20。从图 14-20 可以看出收敛速度较慢，我们需要增加部分和的项数。

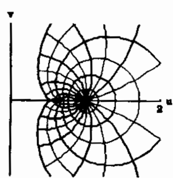


图 14-18

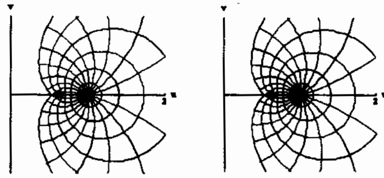


图 14-19

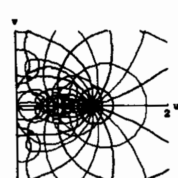


图 14-20

(2) 在$1<|z|<2$内

$$L_2(z)=s_{12}(z)+s_{21}(z)=\cdots-\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^{n-1}}-\cdots+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}+\cdots$$

令$s(x)=\dfrac{3}{2+x-x^2},s_2=L_2(x)$，作出$s(x)$和$L_2(x)$的图形如图 14-21。从图 14-21 可看出在$1<x<2$内，$L_2(x)$收敛于$s(x)$。

对于复平面上，我们需要选择圆环域$1<|z|<2$的中间部分圆环域，不妨选取$1.3<|z|<1.6$，分别作出$f(z)$和$L_2(z)$的部分和图形如图 14-22。从图 14-22，我们看到$L_2(z)$收敛于$f(z)$。

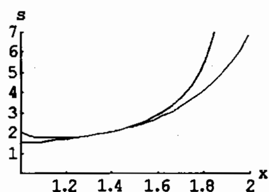


图 14-21

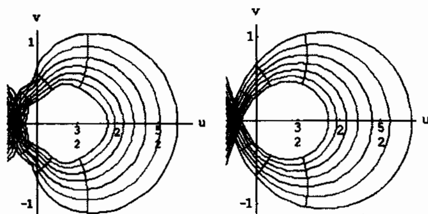


图 14-22

(3) 在$|z|>2$内

$$L_3(z)=s_{12}(z)+s_{22}(z)=\cdots-\frac{1023}{z^{11}}-\frac{513}{z^{10}}-\frac{255}{z^{9}}-\frac{129}{z^{8}}-\frac{63}{z^{7}}-\frac{33}{z^{6}}-\frac{15}{z^{5}}$$
$$-\frac{9}{z^{4}}-\frac{3}{z^{3}}-\frac{3}{z^{2}}$$

令$s(x)=\dfrac{3}{2+x-x^2}$,$s_3=L_3(x)$,作出$s(x)$和$L_3(x)$的图形如图 14-23。从图 14-23 可看出在$x>2$内，$L_3(x)$收敛于$s(x)$。

对于复平面上，我们可以选择$|z|>3$，在$|z|>3$时分别作出$f(z)$和$L_3(z)$的部分和图形如图 14-24。

从图 14-24，我们看到$L_3(z)$收敛于$f(z)$。

如果选择接近$|z|=2$的区域，如$2.2<|z|<4$,我们作出$L_3(z)$的部分和图形如图 14-25。从图 14-25，我们看到$L_3(z)$收敛比较慢，需要增加部分和的项数。

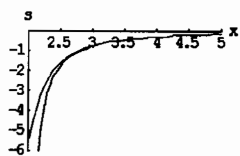


图 14-23

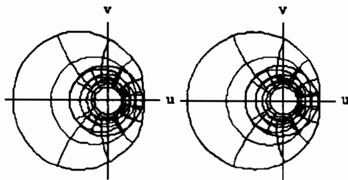


图 14-24

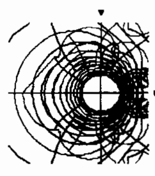


图 14-25

练习 11 由以上实验，你能得出有关洛朗级数收敛区域与收敛速度有什么关系吗？

练习 12 选取不同的收敛域和改变部分和的项数，重复实验 14，并验证你的结论。

练习 13 将下列各函数在指定的圆环域内展开成洛朗级数：

(1) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}, 1<|z|<2$；（2）$\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}, 0<|z-1|<1; 1<|z-2|<+\infty$；

(3) $\dfrac{1}{z^2(z-i)}$,在以 i 为中心的圆环域内；（4）$\sin\dfrac{1}{1-z}$,在$z=1$的去心邻域内。

并观察其收敛情况。

练习 14 函数$\tan\dfrac{1}{z}$能否在圆环域$0<|z|<R(0<R<+\infty)$内展开成洛朗级数？

练习 15 将函数$f(z)=\dfrac{\cos z-1}{z^4}$展开成洛朗级数。

实验十五　孤立奇点

本实验的目的是进一步理解解析函数在孤立奇点邻域内的性态。

如果函数$f(z)$虽在z_0不解析，但在z_0的某一个去心邻域$0<|z-z_0|<\delta$ 内处处解析，那么z_0称为$f(z)$的孤立奇点。

若z_0为$f(z)$的孤立奇点，则必存在$\delta>0$，使得$f(z)$于圆环$0<|z-z_0|<\delta$ 内解析。由实验十四知，$f(z)$在此圆环内可展成洛朗级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}C_{-n}(z-z_0)^{-n} \tag{15-1}$$

若(15-1)式中不含、只含有限个、含无穷多个$z-z_0$的负幂项，那么分别称z_0为$f(z)$的可去奇点、极点、本性奇点。

实验 1　研究函数$f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$在$z=0$点邻域的性态。

解：$z=0$为$f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$的可去奇点。$f(z)$可展开为洛朗级数

$$f(z)=1-\frac{z^2}{6}+\frac{z^2}{120}-\cdots$$

对于实数情形，令$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $s(x)=1-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}-\cdots$，分别作出$f(x)$和$s(x)$的部分和图形如图 15-1。从图 15-1 中可以看出$s(x)$在$x=0$的邻域内收敛于$f(x)$。

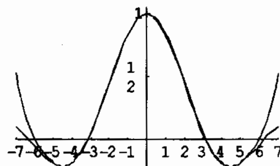


图 15-1

对于复数情形，在$z=0$的邻域内分别画出$f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$实部和虚部的三维图形和等高线图如图 15-2、图 15-3。

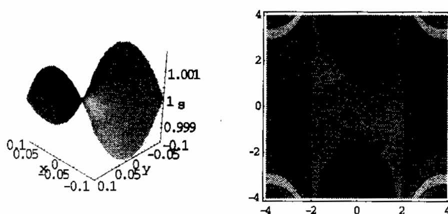


图 15-2

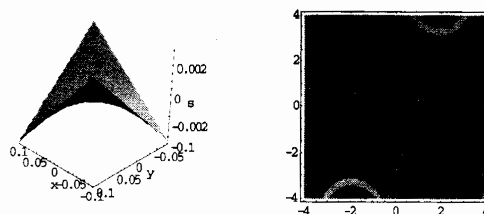


图 15-3

练习 1 研究函数 $f(z)=\dfrac{\cos z-1}{z^2}$ 在 $z=0$ 邻域内的性态。

实验 2 研究函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$ 在 $z=0$ 邻域内的性态。

解：$z=0$ 为 $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$ 的一级极点。$f(z)$ 可展开为洛朗级数

$$f(z)=1+\frac{1}{z}+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{6}+\frac{z^3}{24}+\frac{z^4}{120}+\cdots$$

对于实数情形，令 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$，$s(x)=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^3}{24}+\dfrac{x^4}{120}+\cdots$ 分别作出 $f(x)$ 和 $s(x)$ 的部分和图形如图 15-4。对于复数情形，在 $z=0$ 的邻域内分别画出 $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$ 实部和虚部的三维图形和等高线图如图 15-5、图 15-6。

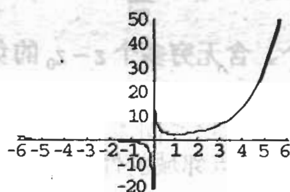
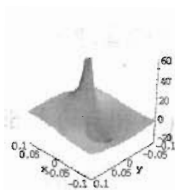


图 15-4



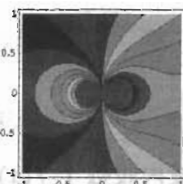
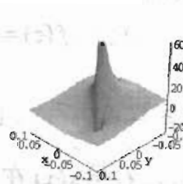


图 15-5



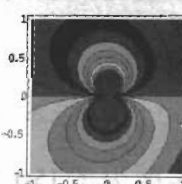


图 15-6

实验 3 研究函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$ 在 $z=0$ 邻域内的性态。

解：$z=0$ 为 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的二级极点。$f(z)$ 可展开为

$$f(z)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6}+\frac{z^2}{120}-\frac{z^4}{5040}+\cdots$$

分别考虑实数、复数情形，类似于实验 2，得到图形 15-7、图形 15-8、图形 15-9。

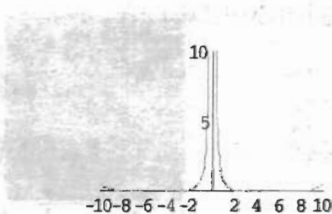


图 15-7

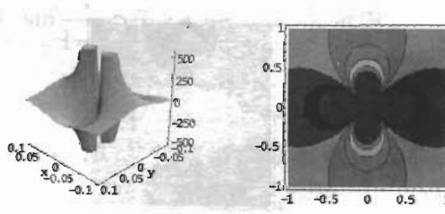


图 15-8

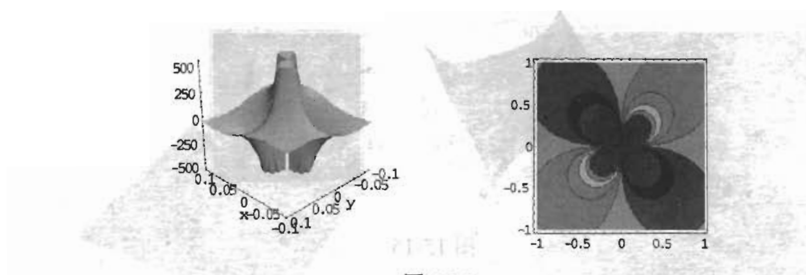


图 15-9

练习 2 试比较实验 2 与实验 3 中的图形，你能得出什么结论？

实验 4 研究函数 $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}$ 在 $z=0$ 邻域内的性态。

解：$z=0$ 为函数 $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}$ 的本性奇点，类似于实验 2，得到图形如图 15-10、图 15-11、图 15-12。

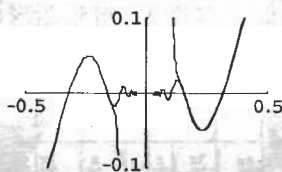


图 15-10

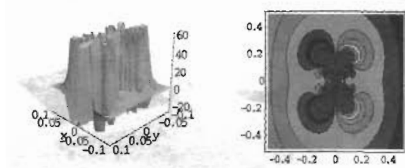


图 15-11

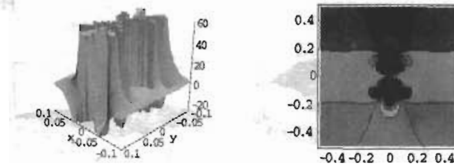


图 15-12

练习 3 试比较实验 4 与实验 3 中的图形，你能得到什么结论？

练习 4 求下列函数 $f(z)$ 在扩充复平面上的奇点，判别其类型，并研究函数 $f(z)$ 在这些邻域内的性态。

(a) $\dfrac{z^7}{(z-1)(1-z^2)^2}$；(b) $\dfrac{z^6+1}{z(z^2+1)^3}$；(c) $e^{\tan\frac{1}{z}}$；(d) $\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^{z-1}-1}$。

实验 5 研究函数 $f(z)=z\sin z^2$ 在 $z=0$ 邻域内的性态。

解：$z=0$ 为 $f(z)=z\sin z^2$ 的三级零点。类似于实验 2，得到图形如图 15-13、图 15-14、图 15-15。

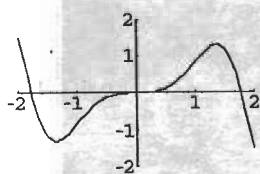


图 15-13

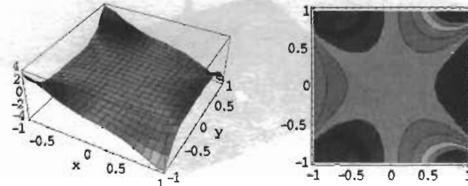


图 15-14

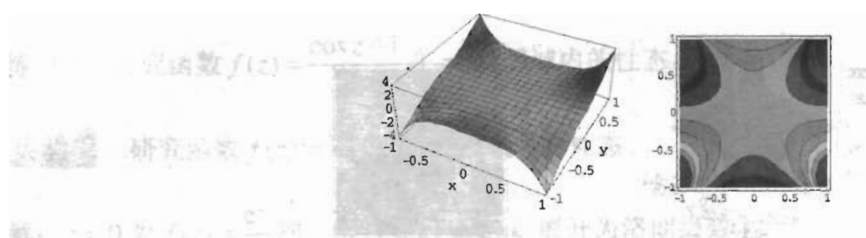


图 15-15

练习 5 观察实验 5 的图形并与实验 3 中的图形比较，你能得出极点与零点有什么关系吗？

练习 6 研究函数 $f(z)=z^3\sin z$ 在 $z=0$ 邻域内的性态。

实验 6 求出函数 $f(z)=\dfrac{\tan z}{z}$ 的极点和零点，并决定其级数。

解： $z=0$ 为 $f(z)=\dfrac{\tan z}{z}$ 的可去奇点；$z=n\pi, n=\pm1,\pm2,\cdots$ 为 $f(z)$ 的一级零点，$z=\dfrac{(2n-1)\pi}{2}$，$n=\pm1,\pm2,\cdots$ 为 $f(z)$ 的一级极点。类似于实验 2，得到图形如图 15-16、图 15-17、图 15-18。

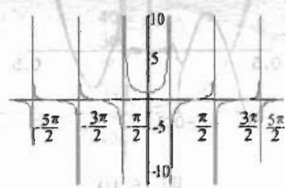


图 15-16

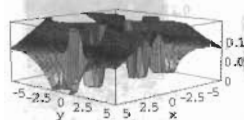


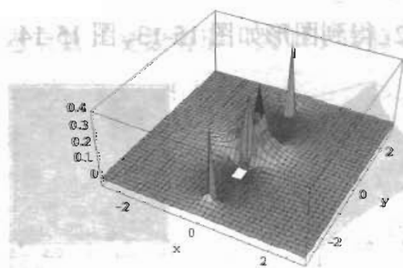
图 15-17 实部图形图

图 15-18 虚部图形

练习 7 求出函数 $f(z)=\dfrac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}$ 的极点和零点，并决定其级数。

实验 7 研究函数 $f(z)=\dfrac{1}{5z^4+26z^2+5}$ 的极点。

解：$z_1=-\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{5}}, z_2=\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{5}}, z_3=-\mathrm{i}\sqrt{5}, z_4=\mathrm{i}\sqrt{5}$ 为函数 $f(z)$ 的四个一级极点。采用类似于实验 2 的方法，得到图形如图 15-19、图 15-20、图 15-21。



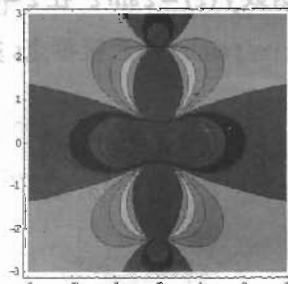


图 15-19 实部的图形

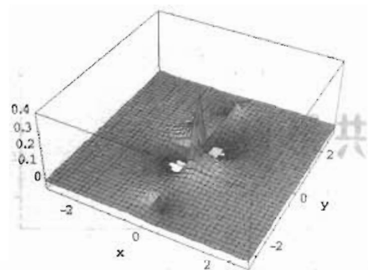
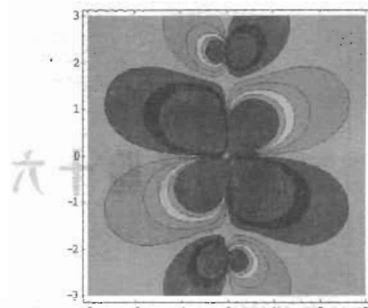



图 15-20　虚部的图形

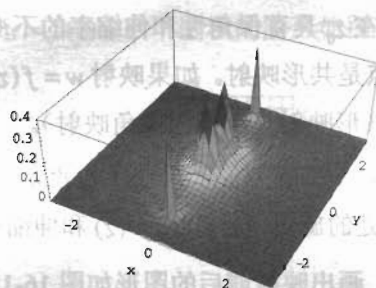
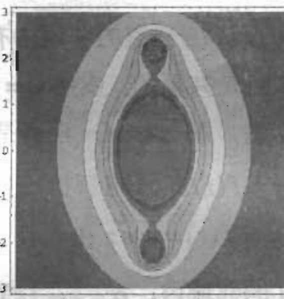



图 15-21　$|f(z)|$的图形

实验十六　共形映射

本实验的目的是从图形上了解区域在共形映射下的变化以及几种常见共形映射的性质。

16.1　共形映射的基本性质

设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 点的邻域内有定义，且在 z_0 具有保角性和伸缩率的不变性，那么映射 $w=f(z)$ 在 z_0 点是共形的，或称 $w=f(z)$ 在 z_0 点是共形映射。如果映射 $w=f(z)$ 在区域内的每一点都是共形的，那么称 $w=f(z)$ 是区域内的共形映射（或称为保角映射）。

如果函数 $w=f(z)$ 在 z_0 点解析，且 $f'(z_0)\neq 0$，那么映射 $w=f(z)$ 在 z_0 点是共形的。

实验 1　求出 $w=f(z)=\cos z$ 在点 i，1−i 和 $\pi+\mathrm{i}$ 处的旋转角 $\alpha=\arg f'(z)$ 和伸缩率 $|f'(z)|$。

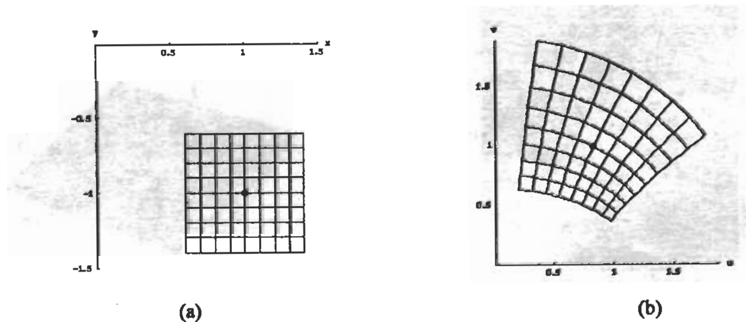
解：(1) 在 $z=\mathrm{i}$ 的邻域内，$\alpha=-\dfrac{\pi}{2},|f'(z)|=\sinh 1$，画出映射前后的图形如图 16-1。

(a)　　(b)

图 16-1

(2) 在 $z=1-\mathrm{i}$ 的邻域内，$\alpha=\pi-\arctan\cot|\tanh 1|$，$|f'(z)|=\sqrt{\cosh^2 1\sin^2 1+\cos^2 1\sinh^2 1}$。画出映射前后的图形如图 16-2。

(3)　在 $z=\pi+\mathrm{i}$ 邻域内，$\alpha=\dfrac{\pi}{2},|f'(z)|=\sinh 1$，画出映射前后的图形如图 16-3。



(a)　　(b)

图 16-2

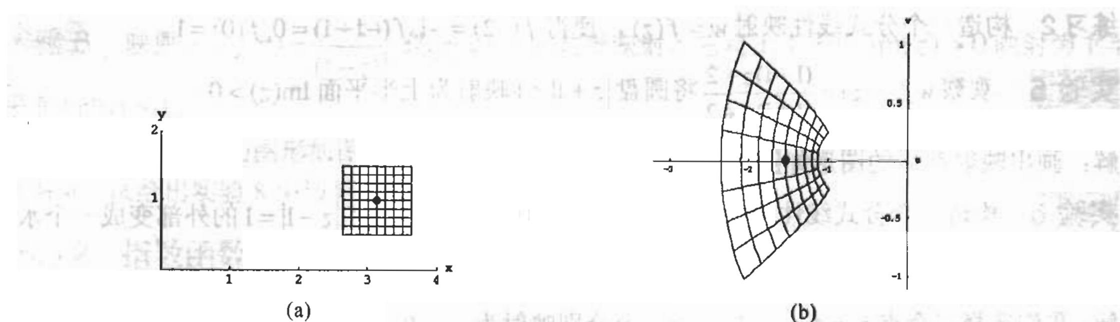


图 16-3

实验 2　画出映射 $w=f(z)=z^2$ 的图形。

解：在映射 $w=f(z)=z^2$ 下区域的图形如图 16-4。

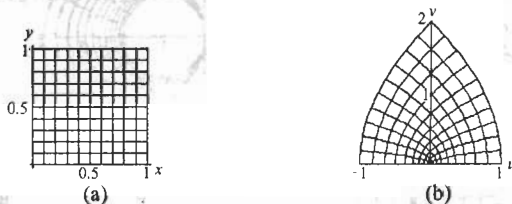


图 16-4

练习 1　比较实验 1 与实验 2 的图形，你能得出什么结论？

16.2　分式线性映射

由 $w=\dfrac{az+b}{ca+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ 确定的映射称为分式线性映射。

因为 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 有单值的反函数 $z=\dfrac{-dw+b}{cw-a}$　$(ad-bc\neq 0)$，故其逆映射 $z=\dfrac{-dw+b}{cw-a}$ 也是分式线性映射。

实验 3　观察 $w=f(z)=\dfrac{\mathrm{i}(1-z)}{1+z}$ 将单位圆盘 $|z|<1$ 变成上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$。

解：画出映射前后的图形如图 16-5。

从图 16-5 我们看到 $w=f(z)$ 确实将单位圆盘 $|z|<1$ 变成上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$。

实验 4　构造一个分式线性映射 $w=f(z)$，使得 $f(-\mathrm{i})=-1, f(1)=0, f(\mathrm{i})=1$。

解：由交比不变性，$f(z)=-\dfrac{\mathrm{i}(-1+z)}{1+z}$，画出映射的图形如图 16-6。

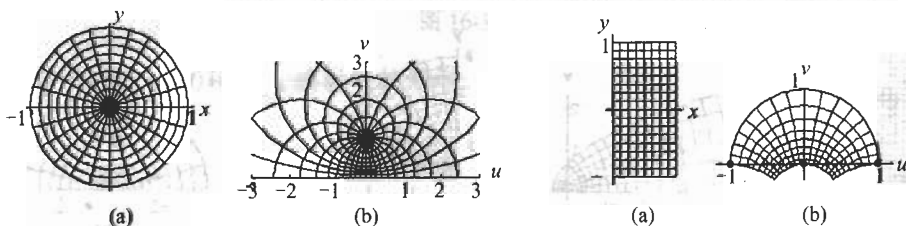


图 16-5　　图 16-6

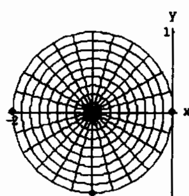
练习 2 构造一个分式线性映射 $w=f(z)$，使得 $f(-2)=-1, f(-1-\mathrm{i})=0, f(0)=1$。

实验 5 观察 $w=f(z)=\dfrac{(1-\mathrm{i})z+2}{(1+\mathrm{i})z+2}$ 将圆盘 $|z+1|<1$ 映射为上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$。

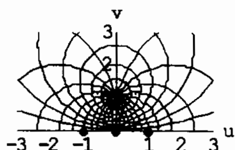
解：画出映射前后的图形如图 16-7。

实验 6 构造一个分式线性映射 $w=f(z)$，它将区域 $|z-2|<2$ 和 $|z-1|=1$ 的外部变成一个水平的带状区域。

解：我们选择三个点 $z_1=4, z_2=2+2\mathrm{i}, z_3=0$ 分别映射为 $w_1=0, w_2=1, w_3=\infty$，则 $f(z)=-\dfrac{\mathrm{i}(z-4)}{z}$，画出映射的图形如图 16-8。

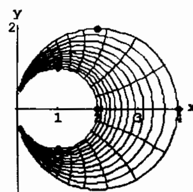


(a)

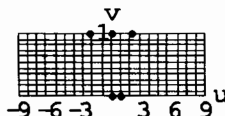


(b)

图 16-7



(a)



(b)

图 16-8

练习 3 求分式线性映射 $w=f(z)$，它将圆盘 $|z|<2$ 映射成右半平面 $\mathrm{Re}(w)>0$，且使得 $f(0)=1, \arg f'(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

16.3 几个初等函数所构成的映射

16.3.1 幂函数

由幂函数 $w=z^n\,(n\geqslant 2)$所构成映射的特点是：把以原点为顶点的角形域映射为以原点为顶点的角形域。

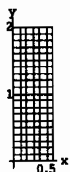
实验 7 映射 $w=f(z)=z^2$ 通常将水平线或铅直线映射为直线或抛物线。

(1) 求出 $x=a$ 的像；(2) 求出 $y=b$ 的像；(3) 求出射线 $r>0, \theta=\alpha$ 和圆 $r=c$ 所围成区域的像。

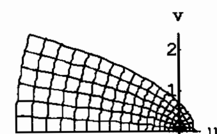
解：（1） $x=a$ 的像为抛物线 $u=a^2-\dfrac{v^2}{4a^2}$；

(2) $y=b$ 的象为抛物线 $u=-b^2+\dfrac{v^2}{4b^2}$；画出图形如图 16-9。

(3) 射线 $r>0, \theta=\alpha$ 和圆 $r=c$ 所围成区域的像为 $r>0, \theta=2\alpha, r=c^2$，图形如图 16-10。

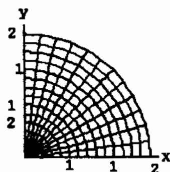


(a)

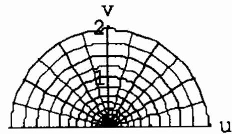


(b)

图 16-9



(a)



(b)

图 16-10

实验 8　映射 $w=f(z)=\dfrac{(1+z)^2}{(1-z)^2}$ 是 $|z|<1$ 内的共形映射，它将上半平面 $\text{Im}(z)>0$ 映射为上半平面 $\text{Im}(w)>0$。

解：画出映射前后的图形如图 16-11。

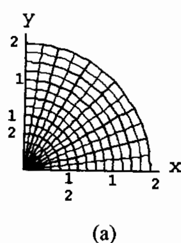
练习 4　试给出实验 8 中边界的映射关系。

16.3.2　指数函数

由指数函数 $w=\mathrm{e}^z$ 所构成的映射的特点是：把水平的带形域 $0<\text{Im}(z)<a$,$(a\leqslant 2\pi)$ 映射成角形域 $0<\arg w<a$。

实验 9　观察映射 $w=\mathrm{e}^z$ 将矩形域 $R=\{(x,y)\,a\leqslant x\leqslant b,\,c\leqslant y\leqslant d\}$ 映射为扇形域的图形。

解：选取矩形域为 $R=\left\{(x,y)\middle|-1\leqslant x\leqslant 1;-\dfrac{\pi}{3}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right\}$，画出图形如图 16-12。


(a)

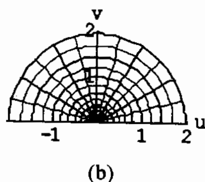
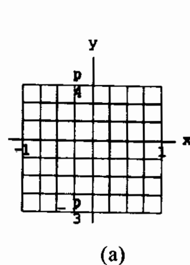

(b)

图 16-11


(a)

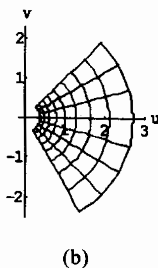
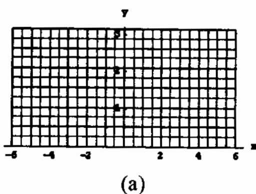

(b)

图 16-12

实验 10　映射 $w=f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-\mathrm{i}}{\mathrm{e}^z+\mathrm{i}}$ 是将水平带状域 $0<y<\pi$ 映射为圆 $|w|<1$ 的共形映射，画出其图形。

解：映射前后的图形如图 16-13。


(a)

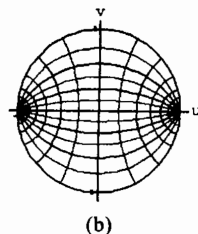

(b)

图 16-13

练习 5　试分别给出 $y=0$ 和 $y=x$ 映射后的曲线。

实验十七　概率论的基本概念

概率论是研究随机现象数量规律的一门数学学科，它是通过研究随机试验来研究随机现象的。本实验的目的是将随机试验可视化，直观理解概率论中的一些基本概念，从频率与概率的关系来体会概率的统计定义；并初步体验随机模拟方法。

17.1　频率与概率

实验 1　抛硬币试验。

(1) 模拟掷一枚均匀硬币的随机试验(可用 0—1 随机数来模拟试验结果)，取 $n=100$，模拟 n 次掷硬币的随机试验。记录试验结果，观察样本空间的确定性及每次试验结果的偶然性；统计正面出现的次数，并计算正面出现的频率；

(2) 取试验次数 $n=1000$，将过程(1)重复三组，比较三组试验结果中正面出现的频率，你能得到什么结论？

解：输入以下 Mathematica 语句：

```
<< Statistics`
n = 100; t = {};Do[t = Append[t, Random[Integer]], {i, n}];data = Frequencies[t];
times = data[[2]][[1]];p = N[times/n]
```

比较各组正面出现的频率，可以看到：当试验次数相同时，不同组试验得到的频率也往往不同。这表明：频率具有随机性；另外，在多次重复试验中，出现正面的频率在一个定值附近摆动，而且随着试验次数的增加，一般来说，其摆动越小，观察到的大偏差也越稀少，呈现出一定的稳定性。

练习 1　改变试验次数 n，重做实验 1。

实验 2　高尔顿钉板试验。

这个试验是英国科学家高尔顿设计的，具体如下：自板上端放一个小球，任其自由下落。在其下落过程中，当小球碰到钉子时从左边落下的概率为 p，从右边落下的概率为 $1-p$，碰到下一排钉子又是如此，最后落到底板中的某一格子。因此任意放入一球，则此球落入哪个格子事先难以确定。设横排共有 $m=20$ 排钉子，下面进行模拟试验：

(1) 取 $p=0.5$，自板上端放入一个小球，观察小球落下的位置；将该试验重复作 5 次，观察 5 次试验结果的共性及每次试验结果的偶然性；

(2) 分别取 $p=0.15, 0.5, 0.85$，自板上端放入 n 个小球，取 $n=5000$，观察 n 个小球落下后呈现的曲线。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到不同的 p 值下 5000 个小球落入各个格子的频数的直方图如图 17-1。

```
<< Statistics`
<< Graphics`Graphics`
Galton[n_Integer, m_Integer, p_] := Module[{}, dist = {};
```

```
    For[l = 1, l <= n, l++, k = 0;
    t = Table[Random[BernoulliDistribution[p]], {i, 1, m}];
    Do[If[t[[i]] == 1, k++, k--], {i, 1, m}]; dist = Append[dist, k];
    pp = Frequencies[dist];]; Histogram[dist, BarStyle -> {RGBColor[0, 0, 1]}];]
p = 0.15; n = 5000; m = 20; Galton[n, m, p]
p = 0.5; n = 5000; m = 20; Galton[n, m, p]
p = 0.85; n = 5000; m = 20; Galton[n, m, p]
```

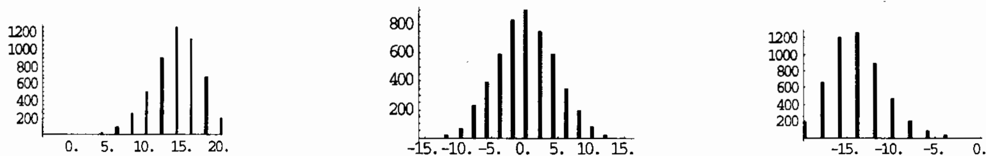


图 17-1 （自左至右 p 依次为 0.15,0.5,0.85）

由图 17-1 可以看出：若小球碰钉子后从两边落下的概率发生变化，则高尔顿钉板试验中小球落入各个格子的频数发生变化，从而频率也相应地发生变化。而且，当 $p>0.5$，曲线峰值的格子位置向左偏；当 $p<0.5$，曲线峰值的格子位置向右偏。

练习 2 取 $p=0.5$，自高尔顿钉板上端放入 n 个小球，取 $n=5000$，观察 n 个小球落下后呈现的曲线，将该试验重复多次，观察多次试验中小球落下后呈现的曲线有无变化？

练习 3 若小球从左边落下的概率分别为 $p=0.3$，$p=0.7$，重做实验 2，你能得到什么结论？

练习 4 改变 n，重做实验 2，试从理论上解释你所得到的结果。

练习 5 （掷骰子试验）模拟掷一颗均匀的骰子，可用产生 1~6 的随机整数来模拟试验结果。

(1) 作 $n=200$ 组试验，统计出现各点的次数，计算相应频率并与概率值 1/6 比较；

(2) 模拟 $n=1000, 2000, 3000$ 组掷骰子试验，观察出现 3 点的频率随试验次数 n 变化的情形，从中体会频率与概率的关系。

17.2 古典概型

古典概型所描述的随机试验满足以下两点：

(1) 试验的样本空间只包含有限个元素；

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同。

设随机试验的基本事件总数为 n，事件 A 包含 k 个基本事件，则 A 发生的概率为

$$p(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{中所包含基本事件个数}}{\text{试验的基本事件总数}}$$

实验 3 （抽签试验）有十张外观相同的扑克牌，其中有一张是大王，让十人按顺序每人随机抽取一张，讨论谁先抽出大王。

甲方认为：先抽的人比后抽的人机会大。

乙方认为：不论先后，他们抽到大王的机会是一样的。

究竟他们谁说的对？

下面我们作模拟试验，用 1~10 的随机整数来模拟试验结果。在 1~10 十个数中，假设 10 代表抽到大王，将这十个数进行全排，10 出现在哪个位置，就代表该位置上的人模到大王。输入以下 Mathematica 语句：

```
<< Statistics`
chouqian[n_Integer] := Module[{times, tt},
    times = Table[Random[Integer, {1, 10}], {i, n}];
    tt = Frequencies[times]; Print[tt]; Table[N[tt[[i]][[1]]/n], {i, 1, 10}]]
n = 100; chouqian[n]
n = 1000; chouqian[n]
n = 5000; chouqian[n]
```

(1) 模拟该试验 100 次，记录每次试验中 10 出现的位置，并将统计结果填入表 17-1；

(2) 模拟该试验 1000, 5000 次，统计试验结果并填入相应表格中，你能得到什么结论？

表 17-1

人员标号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
抽到大王的次数	11	7	9	7	10	12	13	11	12	8
抽到大王的频率/%	11	7	9	7	10	12	13	11	12	8

事实上，若记 A_i 表示第 i 个人抽到大王这一事件，则

$$p(A_1)=\frac{1}{10},$$

$$p(A_2)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10},$$

…………

$$p(A_{10})=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\cdots\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{10}$$

故每个人抽到大王的机会均等。

实验 4 （生日问题）美国数学家伯格米尼曾经做过一个别开生面的试验：在一个盛况空前、人山人海的世界杯足球赛赛场上，他随机地在某号看台上召唤了 22 个球迷，请他们分别写下自己的生日，结果竟发现其中有两人同生日。

怎么会这么凑巧呢？

解：下面我们首先通过计算机模拟伯格米尼试验体验一次旧事重温（用 22 个1～365 的可重复随机整数来模拟试验结果）。

(1) 产生 22 个随机数，当出现两数相同时或 22 个数中无相同数时，试验停止并给出结果；

(2) 重复（1）1000 次，统计试验结果并填入表 17-2；

(3) 产生 40，50，64 个随机数，重复（1)，(2)。

表 17-2

n=1000	r			
	r=22	r=40	r=50	r=64
出现同生日次数	489	880	970	997
出现同生日频率	0.489	0.88	0.97	0.997
$f(r)$	0.476	0.891	0.970	0.997

事实上，设随机选取 r 人，A={至少有两人同生日}，则 $\overline{A}$={生日全不相同}，$P(\overline{A})=\dfrac{P_{365}^{r}}{(365)^{r}}$，

而
$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{P_{365}^{r}}{365^{r}}\triangleq f(r)$$

则 $P(A)$随人数 r 变化的曲线 $f(r)$如图 17-2。

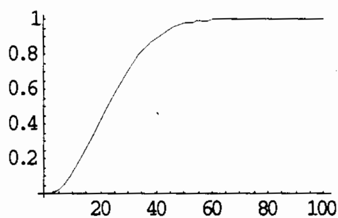


图 17-2

（配对问题）配对问题是现实生活中广泛存在的一类概率问题。如球箱号码配对、钥匙和锁配对、信封和信配对、鞋配对等等。

设有两副不同花色的扑克牌，每副各有 9 张不同的牌，把这两副牌都均匀地洗好之后，再将两副牌依它们的次序逐一翻看对比，若两副牌中同一位置上的两张牌恰好相同。我们就说有一个相含或配对。求至少有一个配对的概率？

解：不妨假设第一副牌按自然顺序排好，而另一副牌共有 9！种排列，出现每种排列的概率都是 $\dfrac{1}{9!}$。

设 B={至少有一个配对}，A_i=｛第 i 个位置上出现配对｝，$i=1,2,\cdots,9$，记 $S_1=\sum\limits_{i=1}^{9}P(A_i)$，$S_2=\sum\limits_{i<j}P(A_iA_j)$，$S_3=\sum\limits_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)$，…，$S_9=P(A_1A_2\cdots A_9)$，于是 $P(B)=P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{9}A_i\right)=S_1-S_2+S_3-\cdots+S_9$。由于 A_i 发生当且仅当第二副牌中的 i 排在第 i 个位置，而其余的 8 张牌可以任意顺序排列，故 $P(A_i)=\dfrac{8!}{9!}=\dfrac{1}{9},i=1,2,\cdots,9$。

同理，
$$P(A_iA_j)=\frac{7!}{9!}=\frac{1}{9\times8},i<j$$
$$P(A_iA_jA_k)=\frac{6!}{9!}=\frac{1}{9\times8\times7},i<j<k$$
…………

在每个 S_k 中恰有 C_9^k 项，其中每项都等于 $\dfrac{(9-k)!}{9!}$，因此 $S_k=\dfrac{1}{k!}$。于是可得
$$P(B)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+\frac{1}{9!}\approx1-\mathrm{e}^{-1}\approx0.63212$$

可以看到，没有一个配对的概率近似等于 $1/\mathrm{e}$。与人们直观认为的此概率应接近于 1 差别较大。输入以下 Mathematica 语句：

```
<<DiscreteMath`Permutations`
m=9;a[0]=RandomPermutation[m];Table[{j,a[0][[j]]},{j,1,m}]
match[m_Integer,n_Integer]:=Module[{a,b,u,z,i},
    Do[a[i]=RandomPermutation[m]; Do[b[j]=If[a[i][[j]]==j,1,0],{j,1,m}];
    u[i] = Sum[b[j],{j,1,m}]; z[i]=If[u[i]>=1,1,0],{i,1,n}];
ProportionOfAtLeastOne=N[Sum[z[i],{i,1,n}]];
frequence=N[ProportionOfAtLeastOne/n];RealProb=-N[Sum[(-1)^i/i!,{i,1,m}]];
AveNumberMatches=N[Sum[u[i],{i,1,n}]/n];
t1=Table[{i,z[i]},{i,1,n}];t2=Table[{j,a[12][[j]]},{j,1,m}];
Print[ProportionOfAtLeastOne];Print[frequence];]
m = 9; n = 300; match[m, n]; m = 9; n = 1000; match[m, n];
m = 9; n = 2000; match[m, n];
```

进行模拟试验：

(1) 用 1~9 的随机整数模拟第二副牌的试验结果，并与第一副牌的自然顺序 1~9 相比较，统计出现配对次数；

(2) 将（1）重复 300 次，1000 次，2000 次，统计出现配对次数并填入表 17-3：

表 17-3

试验次数	出现配对次数	出现配对频率	理论计算（至少有一个配对的概率）
300	194	0.646667	
1000	630	0.63	0.632
2000	1229	0.6145	

练习 6 从 6 双不同的手套中任取 4 只，模拟求下列事件发生的概率并与理论值比较：

(1) 没有成对的手套；（2）恰有一双手套；（3）恰有两双手套。

练习 7 袋中装有 1,2,⋯, N 号的球各一只，采用（1）有放回；（2）不放回方式摸球，试模拟计算在第 k 次摸球时首次摸到 1 号球的频率并与对应概率值比较。

练习 8 （德梅尔悖论）将一颗骰子投掷 4 次，至少出 1 次 6 点与将两颗骰子投掷 24 次，至少出一次双 6 点的机会一样，通过模拟试验验证其正确与否？

(1) 将一颗骰子投掷 4 次的试验进行 100 组，统计每组中是否出 6 点，若出 6 点记数一次，可用 1~6 随机整数来模拟试验结果。增加试验组数为 1000，2000。记录结果。

(2) 将两颗骰子投掷 24 次的试验进行 100 组，统计每组中是否双 6 点，若出双 6 点计数 1 次。增加试验组数为 1000,2000。记录结果且与(1)的结果比较，并从理论上解释原因。

17.3 几 何 概 型

几何概型所描述的随机试验满足：

(1) 试验的样本空间是一个可度量的几何区域（这个区域可以是一维、二维，甚至 n 维）。

(2) 试验的每个基本事件发生的可能性都一样。即样本点落入某一个可度量的子集 A 的可能性大于与 A 的几何测度成正比，而与 A 的形状及位置无关。

在几何概型随机试验中，设 A 为样本空间 Ω 的一个可度量的子集，则随机事件“点落入区域 A”的概率定义为：

$$P(A)=\frac{A\text{的几何测度}}{\Omega\text{的几何测度}}$$

其中几何测度可以是长度、面积或体积。

实验 6 （会面问题）甲、乙二人约定八点到九点在某地会面，先到者等 20 分钟后离去，试求两人能会面的概率。

解：由于甲、乙二人在[0,60]时间区间中任何时刻到达是等可能的，若以 X，Y 分别表示甲乙二人到达的时刻，则每次试验相当于在边长为 60 的正方形区域

$$\Omega=\{(X,Y);0\leqslant X, Y\leqslant 60\}$$

中取一点。

设两人到达时刻互不影响，因此(X,Y)在 Ω 的区域内取点的可能性只与区域的面积大小成正比，而与其形状、位置无关。于是会面问题可化成向区域 Ω 随机投点的问题。所关心的事件“二人能会面”可表示为

$$A=\{(X,Y):|X-Y|\leqslant 20\}$$

示意图如图 17-3。

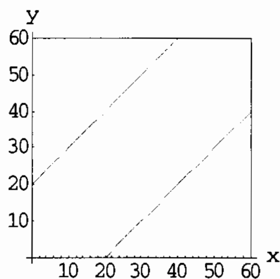


图 17-3

于是，

$$P(A)=(A\text{的面积})/(\Omega\text{的面积})=\frac{5}{9}\approx 0.556$$

输入以下 Mathematica 语句：

```
meet[n_Integer] := Module[{x},
x[k_] := x[k] = Abs[Random[Integer, {0, 60}] - Random[Integer, {0, 60}]];
pile = Table[x[k], {k, 1, n}];times = Count[pile, x_ /; 0 <= x <= 20];
    Print[times];      frequence = N[times/n]]
n = 100; meet[n]
n = 1000; meet[n]
n = 5000; meet[n]
n = 10000; meet[n]
```

作模拟试验：

(1) 模拟向有界区域 Ω 投点 n 次的随机试验，取 n=100，统计每次投点是否落在 A 所示的

区域中，若是则计数 1 次。

(2) 改变投点次数 $n=1000, 5000, 10000$，统计落入区域 A 的次数并填入表 17-4：

表 17-4

约会次数	约会成功次数	约会成功频率	理论约会成功概率
100	61	0.61	0.556
1000	579	0.579	
5000	2800	0.56	
10000	5636	0.5636	

实验 7 （蒲丰投针试验）在平面上画有等距离为 $a(a>0)$ 的一些平行线，向平面上随机投一长为 $L(L<a)$ 的针。求针与平行线相交的概率 $P(A)$。

解：若以 M 表示针的中点，以 x 表示 M 距最近平行线的距离，θ 表示针与平行线的交角。则针与平行线相交的充要条件是 (θ,x) 满足

$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant L\sin\theta/2 \\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi \end{cases}$$

于是蒲丰投针试验就相当于向平面区域 $G=\left\{(\theta,x),0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}\right\}$ 投点的几何型随机试验，如图 17-4 所示。

此时
$$P(A)=\frac{A\text{的面积}}{G\text{的面积}}=\frac{2L}{\pi a}$$

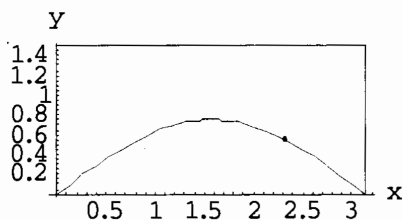


图 17-4

由于针与线相交的概率（理论值）为 $P=\frac{2L}{\pi a}$，可得 $\pi=\frac{2L}{Pa}$。当投针次数 $N\to\infty$ 时，试验值（针与线相交的频率）$f(N)\approx P$。所以有

$$\pi\approx\frac{2L}{f(N)a}$$

于是，可用蒲丰投针试验求 π 值。

输入以下 Mathematica 语句，进行模拟试验：

```
buffon[n_Integer, L_, a_] := Module[{}, times = 0; t = {};
  tx = Table[Random[Real, {0, Pi}], {i, 1, n}];
  ty = Table[Random[Real, {0, a/2}], {i, 1, n}];
```

```
Do[If[ty[[k]] <= L/2*Sin[tx[[k]]], times++, times], {k, 1, n}];
  frequence = N[times/n]; pi = 2*L/(frequence*a);
  t = Append[t, {n, times, frequence, 2*L/(Pi*a), pi}];
  TableForm[t, TableHeadings -> {None, {"n", "times", "frequence", "P", "pi"}}]]
n = 1000; L = 1.5; a = 4; buffon[n, L, a]
n = 2000; L = 1.5; a = 4; buffon[n, L, a]
n = 5000; L = 1.5; a = 4; buffon[n, L, a]
n = 10000; L = 1.5; a = 4; buffon[n, L, a]
```

(1) 模拟向平面区域 G 投点 N 次的随机试验，若投点落入 A 则计数 1 次，统计落入区域 A 的次数就是针与线相交次数，计算针与线相交频率，并近似计算 π 的值；

(2) 改变投点次数 N，重复（1），并将计算结果填入表 17-5。

表 17-5

投针数	针与线相交次数	针与线相交频率	针与线相交概率	π 的近似值
1000	239	0.239	0.238732	3.13808
2000	476	0.238		3.15126
5000	1202	0.2404		3.1198
10000	2383	0.2383		3.14729

值得注意的是这里采用的方法：建立一个概率模型，它与某些我们感兴趣的量——这里是常数 π 一有关，然后设计适当的随机试验，并通过这个试验的结果来确定这些量。现在，随着计算机的发展，已按照上述思路建立起一类新的方法：随机模拟方法。

练习 9 （蒲丰投针问题的续 1）在平面上画有等距离为 $a(a>0)$ 的一些平行线，向平面上任意投一直径为 $L(L<a)$ 的半圆形纸片。求事件 E={纸片与平行线相交}的概率，并模拟之。

解：设想将半圆形纸片拼成一个圆形，并记 $F=\{$新拼的半圆形与平行线相交$\}$。则

$E\cup F$={直径为 L 的圆形与平行线相交}，

$E\cap F$={长为 L 的线段（即公共直径）与平行线相交}

由蒲丰问题可知，$P(E\cap F)=\dfrac{2L}{\pi a}$。以 r 表示圆心到最近平行线的距离，则 $\Omega=[0,\dfrac{a}{2}]$，而 $E\cup F=\{r\in\Omega: r\leqslant L/2\}$，故 $P(E\cup F)=\dfrac{L}{a}$。由加法公式可得：

$$P(E)+P(F)=P(E\cup F)+P(E\cap F)=\frac{\pi L+2L}{\pi a}$$

而由对称性 $P(E)=P(F)$，故所求概率为：

$$P(E)=\frac{0.5\pi L+L}{\pi a}$$

注意到上式的分子恰为半圆形纸片周长。回忆蒲丰问题中针与平行线相交的概率中，分子 $2L$ 也可看作针的周长。同时，上面算出的圆与平行线相交的概率为 $P(E\cup F)=\dfrac{\pi L}{\pi a}$，其分子也是圆周长，那么，抛掷更一般的图形时是否也有相应的结论呢？

练习 10 （蒲丰投针问题的续 2）在平面上画有等距离为 $a(a>0)$ 的一些平行线，向平面上任意投一三角形。设三角形三条边长 L_1,L_2,L_3 均小于 a，求事件 B={三角形与平行线相交}的概率，并模拟之。

练习 11 （贝特朗悖论）在一半径为 r 的圆 C 内任意作一弦，试求此弦的长度 L 大于圆内接等边三角形边长的概率。

解 1：作半径为 $r/2$ 的同心圆 C_1。若弦的中点 m 落入 C_1 内，则 $L>\sqrt{3}r$，故所求概率为两圆面积之比，即 $P=\dfrac{\pi\left(r/2\right)^2}{\pi r^2}=\dfrac{1}{4}$。

解 2：设弦 AB 的一端 A 固定在圆周上，另一端是任意的，考虑等边三角形 ΔADE，如果 B 落于 $\angle A$ 对应的弧 DE 上，则 $L>\sqrt{3}r$，故所求概率为：

$$P=\frac{DE\text{的弧长}}{\text{圆的周长}}=\frac{1}{3}$$

解 3：设弦 AB 垂直于直径 EF，如果 AB 的中点 M 在 GH 上，那么 $L>\sqrt{3}r$，因此所求概率为

$$P=\frac{GH\text{的长度}}{EF\text{的长度}}=\frac{1}{2}$$

投点次数均取为 $n=5000$，做以下模拟试验：

(1) 模拟解法 1：可用向半径为 r 的圆 C 内投点来模拟，投点 n 次，若投点落入 C 内，则计数 1 次。统计计数结果，计算 P 的近似值；

(2) 模拟解法 2：可用向长为 $2\pi r$ 的线段上投点来模拟，将线段分为等长的三段。投点 n 次，若投点落在中间的一段，则计数 1 次。统计计数结果，计算 P 的近似值；

(3) 模拟解法 3：可用向长为 $2r$ 的线段 EF 上投点来模拟，若投点落在 GH 上，则计数 1 次，统计计数结果，计算 P 的近似值。

此问题一题多解，答案不同，原因何在？请思考。

原因在于取弦时采用了不同的等可能性假定。

第一种解法假定弦的中点在圆内均匀分布，第二种解法假定弦的端点在圆周上均匀分布，第三种解法则假定弦的中点在直径上均匀分布。这三种答案是针对不同的随机试验，对于各自试验而言都是正确的，因此用等可能性描述模型特点具有局限性。

17.4 独立性

实验 8 诸葛亮与臭皮匠

常言道，“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”。这是对人多办法多、人多智慧高的一种赞誉，你可曾想到，它可以从概率的计算得到证实。

下面我们来模拟：利用计算机随机提问，统计诸葛亮回答出问题的次数以及三个“臭皮匠”回答出问题的次数（如表 17-6 所示）。设诸葛亮、每个臭皮匠独立解决某问题的概率分别为：

$$P(A)=0.9, P(A_1)=0.45, P(A_2)=0.55, P(A_3)=0.60$$

表 17-6

提问次数	诸葛亮 答出次数	臭皮匠甲 答出次数	臭皮匠乙 答出次数	臭皮匠丙 答出次数	臭皮匠 答出次数
100	92	38	46	51	83
1000	898	469	542	605	906
5000	4511	2293	2760	3001	4544

事实上，若用A_i（$i=1,2,3$）表示“第i个臭皮匠独立解决某问题”，则事件B——“问题被解决”可表示为$B=A_1+A_2+A_3$，则

$$P(B)=P(A_1+A_2+A_3)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=1-0.55\times0.45\times0.4=0.901$$

看！三个并不聪明的“臭皮匠”居然能解决90%以上的问题，聪明的诸葛亮也不过如此。

练习 12 改变诸葛亮、每个臭皮匠独立解决某问题的概率以及提问次数，重作实验 8。

附 Mathematica 程序

1. 实验 4 的程序

```
<< Statistics`
Clear[p, k];p[k_] = 1 - 365!/(365 - k)!/365^k;Plot[p[k], {k, 1, 100}];k=23;
Do[x[j]=Random[Integer,{1,365}],{j,1,k}]
b[0]=Table[x[j],{j,1,k}];j=0;a[j]=0;
While[a[j]==0 && k > j, m=j+1;z[j+1,m]=0;
        While[z[j+1,m]==0 && k > m, z[j+1,m+1]=If[b[0][[j+1]]==
                b[0][[m+1]],1,0];m++];
                a[j+1]=Sum[z[j+1,i],{i,j+1,m}];j++]{j,m}
{b[0][[j]],b[0][[m]]}
birthday[n_Integer,k_Integer]:=Module[{b,c,w,v},
Do[Do[x[i,j]=Random[Integer,{1,365}],{j,1,k}];
b[i]=Table[x[i,j],{j,1,k}];j=0;a[j]=0;
While[a[j]==0 && k > j,m=j+1;z[j+1,m]=0;
 While[z[j+1,m]==0 && k>m,z[j+1,m+1]=If[b[i][[j+1]]==
        b[i][[m+1]],1,0];m++]; a[j+1]=Sum[z[j+1,i],{i,j+1,m}];j++];
 c[i]=j;d[i]=m; v[i]=Sum[a[l],{l,1,j}]; w[i]=If[v[i]==1,1,0],{i,1,n}];
ProportionWithAtLeastTwoSame=N[Sum[w[i],{i,1,n}]/n];
Print[Sum[w[i],{i,1,n}]];Print[ProportionWithAtLeastTwoSame];
RealProb=N[p[k]];Table[{i,v[i]},{i,1,n}];b[8];Print[b[8]];{b[8][[c[8]]],b[8][[d[8]]]};]
n = 1000; r = 22;birthday[n, r];
n = 1000; r = 40;birthday[n, r];
n = 1000; r = 50;birthday[n, r];
n = 1000; r = 64;birthday[n, r];
```

2. 实验 8 的程序

```
<< Statistics`
```

```
zhgl[n_Integer, p, p1, p2, p3] := Module[{k = 0, i}, t = {};
    t1 = Table[Random[BernoulliDistribution[p]], {i, 1, n}];
    times1 = Frequencies[t1][[2]][[1]];
    t2 = Table[Random[BernoulliDistribution[p1]], {i, 1, n}];
    times2 = Frequencies[t2][[2]][[1]];
    t3 = Table[Random[BernoulliDistribution[p2]], {i, 1, n}];
    times3 = Frequencies[t3][[2]][[1]];
    t4 = Table[Random[BernoulliDistribution[p3]], {i, 1, n}];
    times4 = Frequencies[t4][[2]][[1]];
    Do[If[t2[[i]] + t3[[i]] + t4[[i]] == 0, k++, k], {i, 1, n}];
    times = n - k; t = Append[t, {n, times1, times2, times3, times4, times}];
    TableForm[t, TableHeadings -> {None, {"n", "z", "a", "b", "c", "total"}}]]
n = 100; p = 0.9; p1 = 0.45; p2 = 0.55; p3 = 0.6;zhgl[n, p, p1, p2, p3]
n = 1000; p = 0.9; p1 = 0.45; p2 = 0.55; p3 = 0.6;zhgl[n, p, p1, p2, p3]
n = 5000; p = 0.9; p1 = 0.45; p2 = 0.55; p3 = 0.6;zhgl[n, p, p1, p2, p3]
```

实验十八 随机变量及其分布

概率论中研究的主要问题是随机事件及其发生的概率。作为描述随机试验某些结果的随机事件，有些与数值直接发生关系，有些却只是定性描述，与数值间没有直接联系。为了统一研究的方便，在随机试验的结果与实数间建立对应关系，这种单值实值函数（映射）称为随机变量。而随机变量的引入，也使概率论的研究由个别随机事件扩大为随机变量所表征的随机现象的研究。

本实验的目的是通过图形来直观理解随机变量及其概率分布特点，利用图形进一步理解各种概率分布之间的关系。

18.1 离散型随机变量及其概率分布

设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 x_k ，$k=1,2,\cdots$，X 的概率分布(或分布律)为：

$$P\{X=x_k\}=p_k \qquad k=1,2,\cdots$$

p_k（$k=1,2,\cdots$）满足如下两个条件：$p_k \geqslant 0, \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$。

随机变量 X 的分布函数为：

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{k:x_k\leqslant x} P\{X=x_k\}=\sum_{k:x_k\leqslant x} p_k\text{，}\quad \forall x\in R$$

且具有以下性质：单调不减；右连续；$0\leqslant F(x)\leqslant 1$，$F(-\infty)=0, F(\infty)=1$。

常见离散型随机变量分布有二项分布 $B(n,p)$、泊松分布 $\pi(\lambda)$ 等。

实验 1 二项分布。

(1) 取 p=0.2，输入以下 Mathematica 语句，绘出二项分布 $B(20,p)$的概率分布（如图 18-1）与分布函数图（如图 18-2），观察二项分布的概率分布与分布函数图形，理解 p_k 与 F (x)的性质；

```
<< Statistics`
<< Graphics`Graphics`
n = 20; p = 0.2;dist = BinomialDistribution[n, p];
t = Table[{PDF[dist, x + 1], x}, {x, 0, 20}];g1 = BarChart[t, PlotRange -> All];
g2 = Plot[Evaluate[CDF[dist, x]], {x, 0, 20},
      PlotStyle -> {Thickness[0.008], RGBColor[0, 0, 1]}];
t = Table[{x, PDF[dist, x]}, {x, 0, 20}];
gg1 = ListPlot[t, PlotStyle -> PointSize[0.03], DisplayFunction -> Identity];
gg2 = ListPlot[t, PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity];
p1 = Show[gg1, gg2, g1, DisplayFunction -> $DisplayFunction, PlotRange -> All];
```

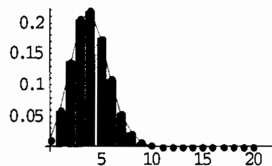


图 18-1

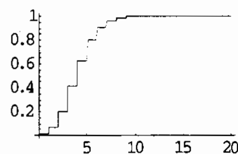


图 18-2

从图 18-1 中可以看到，当k增加时，概率$P\{X=k\}$先是随之增加，直至到$k=4$达到最大值，随后单调减少。从图 18-2 中可以发现$F(x)$的值其实是$X\leqslant x$的累积概率值。

(2) 固定$p=0.2$，分别取$n=10,20,50$，在同一坐标系内绘出二项分布$B(n, p)$的概率分布图形如图 18-3，图中将顶点按顺序连成折线，称为概率分布曲线。观察二项分布的概率分布曲线随参数n的变化。

由图 18-3 可以看出：

(1) 当n变化时，二项分布的概率分布曲线都呈现先上升后下降的趋势。事实上，对于固定的n及p，一般的二项分布都具有这一性质，这正是$\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$在约束着曲线的变化趋势。

(2) 当n增大时，图形的峰值减小，图形趋于对称。

(3) 固定$n=10$，在同一坐标系下分别绘出取$p=0.25,0.5,0.75$的二项分布$B(n,p)$的概率分布曲线如图 18-4，观察二项分布$B(n,p)$的概率分布曲线随参数p的变化；

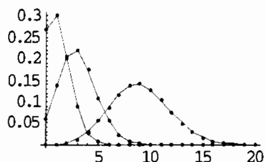


图 18-3

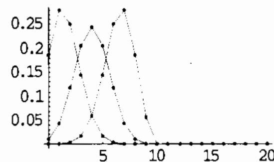


图 18-4

由图 18-4 可以看出：当$p=0.5$时，曲线的峰值较小；另外，当$p=0.5$时，曲线关于$k=\dfrac{n}{2}$，左右对称；而$p\neq 0.5$时，曲线就发生偏倚，而且当$p=0.25<0.5$时，图形向左偏，当$p=0.75>0.5$时，图形向右偏，但二者是对称的。

事实上，上述对称偏倚关系可以从二项分布的概率分布找到答案。考虑到：$C_n^k = C_n^{n-k}$，若令$X \sim B(n,p)$，$Y \sim B(n,1-p)$，则

$$\begin{aligned} p\{X=k\} &= C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^{n-k} (1-p)^{n-k} p^k \\ &= P\{Y=n-k\} \qquad\qquad k=0,1,\cdots,n \end{aligned}$$

这一特点可应用于二项分布的数值查表。一般表中仅列到$p=0.5$，若要求$p=0.9d$的结果，则可从$p=1-0.9=0.1$的栏中，将k数值倒过来查找，即将$0,1,2,\cdots,n$，看作$n,\cdots,2,1,0$，就可查出了。

练习 1　设X服从三点分布，概率分布为

X	0	1	2
p_k	p_1	P_2	P_3

自行选定 p_1, p_2, p_3，绘出三点分布的概率分布与分布函数图，体会概率分布与分布函数之间的关系。

练习 2 绘出 $B(n,0.2)$ 的概率分布曲线，分别取 $n=5,6,7,8,9,10$，观察曲线最高点及其出现位置，你能得到什么结论？请解释原因。

实验 2 泊松分布。分别取 $\lambda=1,2,3,6$，在同一坐标系下绘出泊松分布 $\pi(\lambda)$ 的概率分布曲线，观察曲线特点。输入以下 Mathematica 语句，得到泊松分布的概率分布曲线如图 15-8。

```
<< Statistics`
<< Graphics`Graphics`
p = 1; (*p=2;p=3,p=6;*))
dist = PoissonDistribution[p];t = Table[{x, PDF[dist, x + 1]}, {x, 0, 20}];
gg1 = ListPlot[t, PlotStyle -> PointSize[0.02], DisplayFunction -> Identity];
gg2 = ListPlot[t, PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity];
p1 = Show[gg1, gg2];
```

由图 18-5 可以看出，泊松分布的概率分布曲线随 k 的增加呈现先上升后下降的趋势；另外，随着 λ 的增大，概率分布曲线趋于对称。

回忆实验 1 中二项分布的概率分布曲线随着 n 的增加也趋于对称，那么它们之间有无联系呢？

练习 3 在同一坐标系下画出二项分布（自行输入 n, p）与泊松分布（参数为 $\lambda=np$）的概率分布曲线，你能得到什么结论？

练习 4 在练习 3 中，固定 np 不变，增大 n，减小 p 的取值，观察二项分布图形的变化，并与泊松分布的概率分布曲线比较，你发现了什么？

实验 3 （二项分布的泊松逼近）用泊松分布逼近给出二项分布 $B(k;40,0.2)$ $(k=1,2,\cdots,40)$ 的近似值，并与它的精确值比较。

解：输入以下 Mathematica 语句，作出散点图如图 18-6。

```
<< Statistics`
<< Graphics`Graphics`
n = 40; p = 0.2;dist = BinomialDistribution[n, p];t1 = Table[{x, PDF[dist, x]}, {x, 0, n}];
gg1 = ListPlot[t1, PlotStyle -> PointSize[0.02], DisplayFunction -> Identity];
gg2 = ListPlot[t1, PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity];
p1 = Show[gg1, gg2];
dist = PoissonDistribution[n*p];t2 = Table[{x, PDF[dist, x]}, {x, 0, n}];
gg1 = ListPlot[t2, PlotStyle -> PointSize[0.02], DisplayFunction -> Identity];
gg2 = ListPlot[t2, PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity,
            PlotStyle -> Dashing[{0.02}]];
p2 = Show[gg1, gg2];
p = Show[p1, p2, DisplayFunction -> $DisplayFunction, PlotRange -> All];
```

练习 5 用泊松分布逼近给出二项分布 $B(k;100,0.01)$ $(k=1,2,\cdots,100)$ 与 $B(k;1000,0.01)(k=1,2,\cdots,1000)$ 的近似值，并作出与它们的精确值比较的散点图。

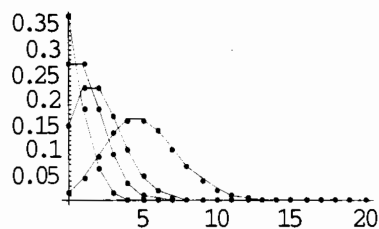


图 18-5

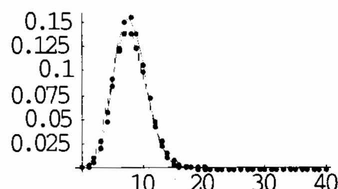


图 18-6

练习 6 试分析 n, p, λ 的关系，并给出评价以泊松分布逼近计算二项分布的近似效果。

18.2 连续型随机变量及其概率密度函数

实验 4 正态分布。

(1) 固定 $\sigma=1$，取 $\mu=-2, \mu=0$, $\mu=2$，输入以下 Mathematica 语句，分别在同一坐标系下绘出正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的概率密度曲线以及分布函数曲线如图 18-7，观察参数 μ 对图形的影响；

```
<< Statistics`
<< Graphics`Graphics`
dist = NormalDistribution[0, 1];dist1 = NormalDistribution[-2, 1];
dist2 = NormalDistribution[2, 1];
Plot[{PDF[dist1, x], PDF[dist2, x], PDF[dist, x]}, {x, -6, 6},
    PlotStyle -> {Thickness[0.008], RGBColor[0, 0, 1]}, PlotRange -> All];
Plot[{CDF[dist1, x], CDF[dist2, x], CDF[dist, x]}, {x, -6, 6}, PlotStyle ->
{Thickness[0.008], RGBColor[1, 0, 0]}];
```

从图 18-7 可以看出：

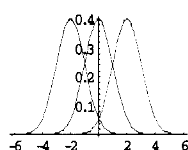
(i) 概率密度曲线是关于 $x=\mu$ 对称的钟形曲线，即呈现“两头小，中间大，左右对称”的特点。

(ii) 当 $x=\mu$ 时，$f(x)$ 取得最大值，$f(x)$ 向左右伸展时，越来越贴近 x 轴。

(iii) 当 μ 变化时，图形沿着水平轴平移，而不改变形状，可见正态分布概率密度曲线的位置完全由参数 μ 决定，所以 μ 称为位置参数。

(2) 固定 $\mu=0$，取 $\sigma=0.5,1,1.5$，输入以下 Mathematica 语句，分别在同一坐标系下绘出正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的概率密度曲线以及分布函数曲线如图 18-8，观察参数 σ 对图形的影响。

```
dist = NormalDistribution[0, 0.5^2];dist1 = NormalDistribution[0, 1];
dist2 = NormalDistribution[0, 1.5^2];
Plot[{PDF[dist1, x], PDF[dist2, x], PDF[dist, x]}, {x, -6, 6},
    PlotStyle -> {Thickness[0.008], RGBColor[0, 0, 1]}, PlotRange -> All];
Plot[{CDF[dist1, x], CDF[dist2, x], CDF[dist, x]}, {x, -6, 6},
    PlotStyle -> {Thickness[0.008], RGBColor[1, 0, 0]}, PlotRange -> All];
```



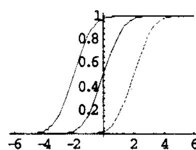
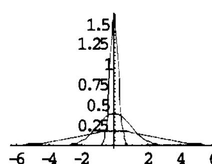


图 18-7



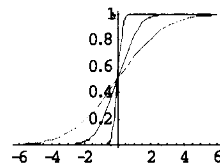


图 18-8

由图 18-8 可以看出：固定μ，改变σ时，当σ越小 0 附近的概率密度图形就变得越尖，分布函数在 0 的附近增值越快，σ越大，概率密度图形就越平坦，分布函数在 0 附近增值也越慢，故σ决定了概率密度图形中峰的陡峭程度；另外，不管σ如何变化，分布函数在 0 点的值总是 0.5，这是因为概率密度图形关于$x=0$对称。

练习 7　自行选定μ,σ^2，绘出正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的概率密度与分布函数图形，并与标准正态分布的对应图形比较。

练习 8　自行选定μ,σ^2，在同一坐标系下绘出正态分布$N(\mu,\sigma^2)$和$N(0,1)$ 的概率密度曲线，试求变换，使对$N(\mu,\sigma^2)$的概率密度曲线施行平移及伸缩变换后与$N(0,1)$ 的概率密度曲线重合。

练习 9　自行选定μ,σ^2，产生 n 个服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的随机数，分别统计落入$[\mu-\sigma,\mu+\sigma]$，$[\mu-2\sigma,\mu+2\sigma]$，$[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$内的随机数个数，计算落入三个区间内的随机数频率并与0.6826,0.9544,0.9974 比较，你能得到什么结论？

练习 10　在同一坐标系下绘出二项分布$B(100,0.2)$与正态分布$N(20,16)$的概率密度曲线，你能发现什么？

实验 5　二项分布的正态分布逼近。用正态分布逼近给出二项分布$B(k;40,0.2)$　$(k=1,2,\cdots,40)$的近似值，并与它的精确值比较。

解：输入以下 Mathematica 语句，作出散点图如图 18-9。

```
<< Statistics`
<< Graphics`Graphics`
n = 40; p = 0.2;dist = BinomialDistribution[n, p];t1 = Table[{x, PDF[dist, x]}, {x, 0, n}];
gg1 = ListPlot[t1, PlotStyle -> PointSize[0.02], DisplayFunction -> Identity];
gg2 = ListPlot[t1, PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity];
p1 = Show[gg1, gg2];t = Table[{PDF[dist, x + 1], x}, {x, 0, n}];
g1 = BarChart[t, PlotRange -> All, DisplayFunction -> Identity];
dist = PoissonDistribution[n*p]; t2 = Table[{x, PDF[dist, x]}, {x, 0, n}];
gg1 = ListPlot[t2, PlotStyle -> PointSize[0.02], DisplayFunction -> Identity];
gg2 = ListPlot[t2, PlotJoined -> True,PlotStyle -> {Dashing[{0.02}], Thickness[0.015]}];
p2 = Show[gg1, gg2];
p = Show[p1, p2, DisplayFunction -> $DisplayFunction, PlotRange -> All];
p3 = Show[g1, p2, DisplayFunction -> $DisplayFunction, PlotRange -> All];
```

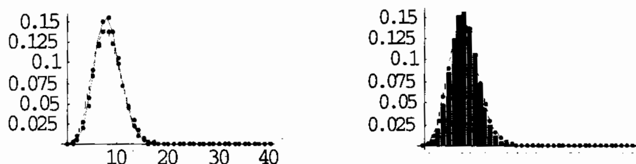


图 18-9

练习 11 用正态分布逼近分别给出二项分布 $B(k;100,0.01)$，$(k=1,2,\cdots,100)$ 和 $B(k;1000,0.01)$，$(k=1,2,\cdots,1000)$ 的近似值，并与它们的精确值比较。

练习 12 在同一坐标系下绘出泊松分布 $\pi(20)$ 与正态分布 $N(20,16)$ 的概率密度曲线，你又发现了什么？

18.3 随机变量函数的分布

实验 6 设 X,Y 相互独立，都服从(0,1)上的均匀分布，求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

解：用卷积公式可求得 $Z=X+Y$ 的密度函数如下：

$$g(z)=\begin{cases} z\ , & 0\leqslant z\leqslant 1 \\ 2-z, & 1\leqslant z\leqslant 2 \\ 0\ , & \text{其它} \end{cases}$$

下面用模拟方法来求：

(1) 产生两组服从(0,1)上均匀分布的相互独立的随机数 x_i, y_i，$i=1,2,\cdots,n, n=1000$，计算 $z_i = x_i + y_i$；

(2) 用数据 z_i 作频率直方图，并在同一坐标系内画出用卷积公式求得的密度函数图形作比较。

输入以下 Mathematica 语句，得频率直方图与密度函数的图形如图 18-10。

```
<< Statistics`
Clear[g1, t, t1, t2]; t = {}; n = 1000;
g1[x_] := 50*Which[0 <= x <= 1, x, 1 <= x <= 2, 2 - x, True, 0];
pic1 = Plot[g1[x], {x, 0, 2}, PlotStyle -> {Thickness[0.01], RGBColor[0, 0, 1]}];
t1 = RandomArray[UniformDistribution[0, 1], n];
t2 = RandomArray[UniformDistribution[0, 1], n];
Do[t = Append[t, t1[[i]] + t2[[i]]], {i, n}];p1 = Histogram[t];
Show[pic1, p1, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

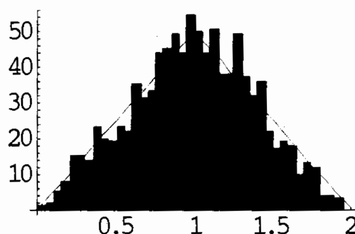


图 18-10

实验十九　数字特征

尽管分布函数能完整地描述随机变量的统计特性，但其求解往往太过复杂、困难，而在一些实际问题中，只需知道随机变量的某些数字特征，而并不需求出它的分布函数。另外，常见的分布总是与数字特征有着千丝万缕的联系,对分布型式已知的随机变量，其数字特征与分布函数更有着确定性的关系。本实验的目的是通过观察和分析实验结果对数字特征的定义及其统计意义加深理解。

19.1 数学期望

19.1.1 数学期望（均值）的确定及统计意义

实验 1 箱中装有大小、形状相同的 10 个球，三个标有号码 0,三个标有号码 1，两个标有号码 2,两个标有号码 3。从箱中任取一球，记下号码后再放回箱中为一次试验。记 X 为所得号码，则 X 是随机变量，其概率分布为：

X	0	1	2	3
p_k	0.3	0.3	0.2	0.2

(1) 进行 N=100 次试验，统计 N 次试验中取得 0 号球、1 号球、2 号球、3 号球的次数 N_0 ,N_1,N_2,N_3，算出 N 次试验所得号码的平均值 $M(N)$:

$$M(N)=0\cdot\frac{N_0}{N}+1\cdot\frac{N_1}{N}+2\cdot\frac{N_2}{N}+3\cdot\frac{N_3}{N}$$

(2) 取 N=1000，将过程（1）重复五组，比较试验结果。

输入以下 Mathematica 语句，将结果记录在表 19-1 中。

```
<< Statistics`
For[j = 1, j <= 5, j++,
  n = 1000; Array[s, n]; Array[a, 5]; Array[b, 4]; x = {0, 1, 2, 3};
  p = {0.3, 0.3, 0.2, 0.2}; dist = {}; Do[b[k] = 0, {k, 1, 4}];   a[1] = 0;
  Do[a[k] = a[k - 1] + p[[k - 1]], {k, 2, 5}];
  For[i = 1, i <= n, i++,k = 1; r = Random[]; While[r > a[k], k++];
    s[i] = x[[k - 1]];b[k - 1] = b[k - 1] + 1]; aa = Table[s[i], {i, 1, n}];
  Print[Table[b[k], {k, 1, 4}], "            ", NSum[(l - 1)*b[l]/n, {l, 1, 4}]]]
```

表 19-1

	0 号球(N_0)	1 号球(N_1)	2 号球(N_2)	3 号球(N_3)	号码平均值($M(N)$)
第一组	303	289	211	197	1.302
第二组	318	287	192	203	1.28

（续）

	0 号球(N_0)	1 号球(N_1)	2 号球(N_2)	3 号球(N_3)	号码平均值 ($M(N)$)
第三组	314	303	192	191	1.26
第四组	269	314	197	220	1.368
第五组	274	298	209	219	1.373

表 19-1 中 $M(N)$是以号码出现频率为权的加权平均。比较 N 固定时的五组试验结果，可以发现：不同组试验中，取到各号码球的次数不同，导致号码的平均值 $M(N)$不同；即 $M(N)$是个随机变量。考虑到频率和概率的关系，在求号码的平均值时，用概率代替频率，得到以号码出现概率为权的加权平均值为：

$$E(X)=0\cdot p_0+1\cdot p_1+2\cdot p_2+3\cdot p_3=1.3$$

这样得到一个确定的数 1.3，我们就用这个数作为所得号码 X 的平均值，称为随机变量的数学期望。每组试验结果均在数学期望 1.3 附近波动，一般来说，随着 N 的增大，M（N）越来越稳定在 E（X）的附近。因此，数学期望的统计意义就是对随机变量进行长期观测所得数据的平均值，即数学期望只对长期或大量观测才有意义。

练习 1　分别取 $N=50,200,2000,5000$，重复实验 1，观察 N 的取值对 $M(N)-E(X)$ 的影响。

练习 2　掷一枚均匀骰子，随机变量 X 代表面上的点数，其概率分布为：

X	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

用 1~5 的随机整数来模拟试验结果。做多次掷骰子试验，记录试验结果，并且计算这些观察值的算术平均值,观察平均值与数学期望的误差，体会数学期望的统计意义。

练习 3　自行选定参数,分别绘出二项分布、泊松分布、均匀分布、正态分布的概率分布曲线或概率密度曲线,观察数学期望对应曲线上的点。你发现了什么？

练习 4　自行选定θ，绘出指数分布 $\mathrm{Exp}(\theta)$ 的概率密度曲线,观察数学期望θ 对应曲线上的点，你又有什么发现？

练习 5　中位数和众数

数学期望虽然是描述随机变量取平均值最常用的数字特征，但有时它不存在（如柯西分布 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$），或有一些明显的缺陷，故有必要引进中位数和众数。

中位数：指满足下述条件的常数 c：

$$P\{X\leqslant c\}\geqslant 0.5 \quad 且 \quad P\{X\geqslant c\}\geqslant 0.5$$

对于连续型随机变量，将概率密度 $f(x)$曲线下方的图形划分为面积相等的两部分的点就是中位数。

众数：指对任意随机变量 X，使其概率密度 $f(x)$（或概率分布 $P(x)$）取得最大值的点 b。众数不唯一，如泊松分布 $\pi(\lambda)$：

试分别绘出 $f(x)=x(0<x<\sqrt{2}), f(x)=2x\mathrm{e}^{-x^2}(x>0)$, 以及正态分布概率密度曲线，分别标

出以该曲线为概率密度的随机变量的数学期望、中位数和众数所对应的点，并观察三者的关系。

19.1.2 数学期望的应用

实验 2 合理验血问题。

在一个人数很多的团体中普查某种疾病，为此要抽验 N 个人的血，现有两种方案：(1) 逐个化验，需验 N 次；(2) 将 k 人并为一组，把从 k 人抽来的血混合在一起进行检验。如果混合血液呈阴性反应，则k人只化验一次，若呈阳性，再对这 k 人逐个化验。这样，该组共需化验 k+1 次。假设每个人化验呈阳性的概率为 p，且这些人的试验反应是相互独立的。

问：哪一种方案好？

解：取 p=0.1，在第二种方案中分别将 k=2,3,4,5,6 人并在一起进行分组,下面对第二种方案进行模拟：

(1) 取 N=1000，产生 N 个服从 $B(1, p)$的随机数，分成$\left[\frac{N}{k}\right]$（表示大于或等于 N / k 的最小整数）组，若某组随机数之和等于 0，计数 1 次，否则计数 k+1 次，累计计数结果就是在第二种方案中将 k 人并在一起进行分组需化验的次数；

(2) 将过程(1)重复 5 次，并计算 k 取不同值时五次试验的平均需化验次数，输入以下 Mathematica 语句，将结果填入表 19-2。

```
<< Statistics`
Clear[x, p, a, aa, b, k, s];n = 1000; q = 0.9;
For[m = 2, m <= 6, m++,    ff = {};
  For[l = 1, l <= 5, l++, freq = 0; h = 0;
    t1 = RandomArray[BinomialDistribution[1, 0.1], n];
    t = CumulativeSums[t1]; a[1] = t[[m + 1]];
    Do[a[j] = t[[m*j]] - t[[m*(j - 1)]], {j, 2, Floor[n/m]}];
    If[m*Floor[n/m] == n, h = Floor[n/m], h = Floor[n/m] + 1;
      a[h] = t[[n]] - t[[m*Floor[n/m]]];];
    Do[If[a[j] == 0, freq = freq + 1, freq = freq + 1 + m], {j, 1, h}];
    ff = Append[ff, freq];];Print[ff, "    ", N[CumulativeSums[ff][[5]]/5]]]
```

表 19-2

	第一次化验次数	第二次化验次数	第三次化验次数	第四次化验次数	第五次化验次数	平均需化验次数 NL
k=2	680	684	684	688	688	684.8
k=3	628	586	628	655	619	623.2
k=4	578	570	634	594	574	590
k=5	560	615	595	685	585	608
k=6	581	593	611	611	581	595.4

从表 19-2 中可以看出：若分组数恰当(k=4)，可以将工作量减到最少而不贻误病情。比如 k=4 时五组模拟试验平均需化验的次数为 590(次)，这比第一种方案需化验 1000 次的工作量大

大减少。

事实上，若设各人的血呈阴性反应的概率为 $q=1-p$，则 k 个人的混合血呈阴性反应的概率为 q^k，混合血呈阳性反应的概率就为 $1-q^k$。又设以 k 个人为一组时，每组需作的化验次数 X 是一个随机变量，其分布律为：

X	1	$k+1$
p_k	q^k	$1-q^k$

每组平均需化验的次数为

$$E(X)=1\cdot q^k+(1+k)(1-q^k)=1-kq^k+k$$

第二种方案平均需化验的次数为

$$\frac{N}{k}(1-kq^k+k)=N(1-q^k+\frac{1}{k})$$

由此可知，只要选择 k 使

$$L=1-q^k+\frac{1}{k}<1$$

则 N 个人平均需化验的次数 $<N$。当 p 固定时，我们选择 k 使得 L 小于 1 且取到最小值，这时，用第二种方案就能得到最好的分组方法。当 $p=0.1$ 时，取 $k=4$ 可使 $L=1-q^k+\frac{1}{k}=0.594$ 取到最小值，因此在第二种方案中将 4 人并在一起进行分组最好。

练习 6　在验血问题中，改变 p，试求最好的分组方案，并模拟验证。

练习 7　轰炸效果问题。

假设有 100 个目标需要摧毁，模拟飞机轰炸，每次随机地击中一个目标且必击中一个目标（可以重复击中）。计算全部摧毁 100 个目标平均所需的炮弹总数，并进行模拟（用 1~100 可重复的随机整数模拟试验结果）。

练习 8　某车间生产的圆盘直径在区间 $U(0, 1)$服从均匀分布，试求该车间生产的圆盘面积的平均值，并与圆盘面积的数学期望相比较。

19.2 方　差

在实际测量中，方差反映了随机变量取值与数学期望的离散程度，用以刻画测量精度。

实验 3　设 X 和 Y 是两个离散型随机变量，其概率分布分别为：

$$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.1 & 0.8 & 0.1\end{pmatrix},\quad Y\sim\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1\end{pmatrix}$$

易得　　$E(X)=E(Y)=0$，　　$D(X)=0.2, D(Y)=1.2$

输入以下 Mathematica 语句，绘出 X 和 Y 的概率分布图形，直观演示 $D(Y)>D(X)$，如图 19-1。

```
<< Graphics`Graphics`
BarChart[{{0.1, -1}, {0.8, 0}, {0.1, 1}}, BarSpacing -> 0.6];
BarChart[{{0.1, -2}, {0.2, -1}, {0.4, 0}, {0.2, 1}, {0.1, 2}}, BarSpacing -> 0.6];
```

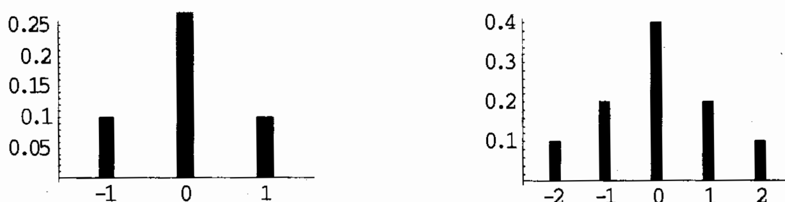


图 19-1

实验 4 设 X,Y,Z 都是连续型随机变量，均服从正态分布：$X \sim N\left(\mu,\sigma_1^2\right)$，$Y \sim N\left(\mu,\sigma_2^2\right)$，$Z \sim N\left(\mu,\sigma_3^2\right),\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$。取 N=2000，输入以下 Mathematica 语句，分别产生服从 $N(\mu,\sigma_1^2)$, $N(\mu,\sigma_2^2)$, $N(\mu,\sigma_3^2)$ 的三组 N 个随机数，并画其直方图如图 19-2。

```
<< Statistics`
n = 2000;data1 = RandomArray[NormalDistribution[0, 1.5^2], n];
Histogram[data1, PlotRange -> All];
data2 = RandomArray[NormalDistribution[0, 1], n];
Histogram[data2 PlotRange -> All];
dta3 = RandomArray[NormalDistribution[0, 0.5^2], n];
Histogram[data3,PlotRange -> All];
```

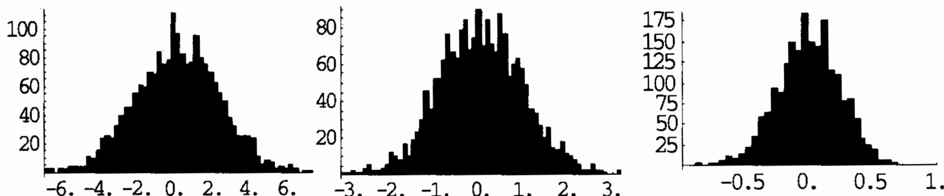


图 19-2

由图 19-3，比较三张直方图可以发现：σ 越小，随机变量落在 μ 附近的概率越大，随机变量取值越密集在 μ 的附近。

练习 9 设 X,Y 均服从泊松分布：$X \sim \pi(2)$，$Y \sim \pi(20)$，分别产生服从 $\pi(2),\pi(20)$ 的两组 N 个随机数，画其直方图，观察参数对随机数取值的影响，并解释原因。

练习 10 设 X,Y 均服从指数分布：$X \sim \text{Exp}(\theta_1)$，$Y \sim \text{Exp}(\theta_2)$，$\theta_1 > \theta_2$，分别产生服从两个分布的两组 N 个随机数，画其直方图，观察参数对随机数取值的影响，并解释原因。

19.3 协方差与相关系数

相关系数是刻画随机变量 X,Y 的线性关系是否密切的尺度。

实验 5 设 B 服从 $[0,2\pi]$ 上的均匀分布，$X = \cos(B)$，$Y = \cos(A+B)$,(A为常数）X 和 Y 的相关系数为 $\rho = \cos(A)$。产生服从 $U[0,2\pi]$ 的 N 个随机数，取 N=100，对应 $A=0,\ A=\frac{\pi}{3},\ A=\frac{\pi}{2}$，$A=\pi$ 分别绘出 X 和 Y 的散点图，观察 ρ 对散点图的影响。输入以下 Mathematica 语句：

```
<< Statistics`
```

```
Clear[x, y]; n = 50;
covar[a_] := Module[{},
    t1 = RandomArray[UniformDistribution[0, 2 Pi], n];
    x[t_] = Cos[t]; y[t_] = Cos[a + t];
    g1 = ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2 Pi},
        PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], DisplayFunction -> Identity];
    txy = Table[{Cos[t1[[i]]], Cos[a + t1[[i]]]}, {i, n}];
    g2 = ListPlot[txy, PlotStyle -> PointSize[0.02], DisplayFunction -> Identity];
    Show[g1, g2, DisplayFunction -> $DisplayFunction];]
a = 0; covar[a];
a = Pi/3; covar[a];
a = Pi/2; covar[a];
a = Pi; covar[a];
```

画出散点图如图 19-3：

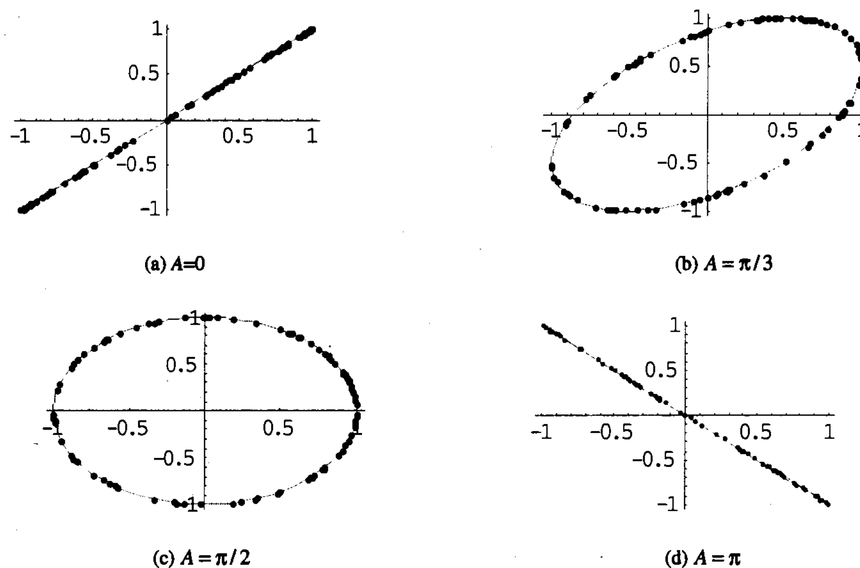


图 19-3

由图 19-3 可以看出：当$|\rho|$较大时，X 和 Y 的线性联系较紧密，特别当$|\rho|=1$时，X 和 Y 之间存在线性关系；当$|\rho|$较小时，X 和 Y 的线性联系较差，特别当$\rho=0$时，X 和 Y 不相关。

练习 11 自行选取 A 与 N，重作实验 5。

练习 12 设 X 和 Y 是两个正态随机变量，它们的相关系数为 r，产生 m 个服从二维正态分布的随机数，自行选取参数，r 以及 m，画出散点图，体会相关系数的含义。

实验二十　大数定律和中心极限定理

在长期实践中人们认识到频率具有稳定性，即当试验次数增大时，频率稳定在一个数的附近，这一事实显示了可以用一个数来表征事件发生的可能性大小。这使人们认识到概率是客观存在的，进而由频率的三条性质的启发和抽象给出了概率的定义，因而频率的稳定性是概率定义的客观基础，大数定律则以严密的数学形式论证了此结论及其一般形式。另外，在测量误差中误差分布常用正态分布来近似，对此，中心极限定理给出合理的解释。

本实验的主要目的是通过观察和分析实验结果加深对大数定律及中心极限定理的理解。

20.1　大数定律

伯努利定理：设 n_A 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则对于任意正数 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$$

或

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0$$

辛钦定理：设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，服从同一分布，且具有数学期望 $E(X_k)=\mu,(k=1,2,\cdots)$，则对于任意正数 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

实验 1　伯努利定理的直观演示。

(1) 产生 n 个服从两点分布 $B(1,p)$ 的随机数，其中 $p=0.5,n=50$，统计1出现的个数代表 n 次试验中事件 A 发生的频数 n_A，计算 $\left|\frac{n_A}{n}-p\right|$；

(2) 将(1)重复 m=100组，对给定的 $\varepsilon=0.05$，统计 m 组中 $\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon$ 成立的次数及 $\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon$ 出现的频率。

输入以下 Mathematica 语句：

```
<< Statistics`
p = 0.5; eps = 0.05; m = 100; out = {};
```

```
For[n = 10, n <= 2000, n *= 3, t = {}; dist = {}; h = 0;
  For[i = 1, i <= m, i++, dist = RandomArray[BinomialDistribution[1, p], n];
    na = Frequencies[dist]; h = Abs[na[[2]][[1]]/n - p];
    t = Append[t, h]]; times = Count[t, x_ /; x >= eps];
  out = Append[out, {n, times, N[times/m]}];]
TableForm[out, TableHeadings -> {None, {"n", "times", "frequence"}}]
```

试验结果如`表 20-1。

表 20-1

n	$\left\|\frac{n_A}{n}-p\right\| \geq \varepsilon$ 出现的次数	$\left\|\frac{n_A}{n}-p\right\| \geq \varepsilon$ 出现的频率
10	72	0.72
30	54	0.54
90	25	0.25
270	15	0.15
810	0	0.00

从表 20-1 可以看出：随着 n 的增大，伯努利试验中事件 A 的频率与概率的偏差不小于 ε 的概率越来越接近于 0，即是说，当 n 很大时，事件发生的频率与概率有较大偏差的可能性很小，由实际推断原理，在实际应用中，当试验次数很大时，便可以用事件发生的频率来代替概率。

练习 1 给定 N，取 $p=0.5, \varepsilon=0.3$，观察 n 从 N 到 $N+50$ 变化时，$f_n=\frac{n_A}{n}$ 在 p 的 ε 邻域内变化的过程。

实验 2 辛钦大数定理的直观演示。

(1) 产生服从 $N(0,1)$ 的 n 个随机数，取 $n=100$，计算 n 个随机数的平均值 $\overline{X}$；

(2) 将（1）重复 $m=100$ 组，对给定的 $\varepsilon=0.05$，统计 m 组中 $\left|\overline{X}\right|<\varepsilon$ 成立的次数及 $\left|\overline{X}\right|<\varepsilon$ 出现的频率。

输入以下 Mathematica 语句：

```
<< Statistics`
eps = 0.05; m = 100; out = {};
For[n = 100, n <= 2000, n += 100,
  t = {}; dist = {}; h = 0;
  For[i = 1, i <= m, i++,   dist = RandomArray[NormalDistribution[0, 1], n];
    na = Mean[dist];t = Append[t, na]]; times = Count[t, x_ /; x < eps];
    out = Append[out, {n, times, N[times/m]}];]
TableForm[out, TableHeadings -> {None, {"n", "times", "frequence"}}]
```

试验结果如表 20-2。

表 20-2

n	$\lvert\overline{X}\rvert<\varepsilon$ 出现的次数	$\lvert\overline{X}\rvert<\varepsilon$ 出现的频率
100	72	0.72
500	86	0.86
1000	97	0.97
1500	96	0.96
2000	99	0.99

从表 20-2 可以看出：服从同一分布的 n 个随机变量的平均值，随着 n 的增大，与原分布的数学期望有较大偏差的可能性很小，于是在实际应用中，可用服从同一分布的大量随机数的平均值来代替分布的数学期望。

练习 2 改变 n，重作实验 2。

练习 3 (1)产生服从参数为 θ 的指数分布的 n 个随机数，计算 n 个随机数的平均值 $\overline{X}$；

(2) 将(1)重复 m=100 组，对给定的 $\varepsilon=0.05$，统计 m 组中 $\left|\overline{X}-\theta\right|<\varepsilon$ 成立的次数及 $\left|\overline{X}-\theta\right|<\varepsilon$ 出现的频率。

(3) 改变 n，θ 及 ε，重复过程（1）、(2)。

你能得到什么结论？从中体会辛钦大数定理的含义。

20.2 中心极限定理

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布的随机变量序列，且对 $i=1,2,\cdots$ 有：

$$E(X_i)=\mu \quad , \quad D(X_i)=\sigma^2$$

则

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1)$$

它表明，当 n 充分大时，n 个具有期望和方差的独立同分布的随机变量之和近似服从正态分布。

实验 3 中心极限定理的直观演示——原始分布是离散分布。

(1) 产生服从二项分布 $B(10,p)$ 的 n 个随机数，取 $p=0.2$，$n=50$，计算 n 个随机数之和 y 以及 $\frac{y-10np}{\sqrt{n\cdot 10p(1-p)}}$；

(2) 将（1）重复 m=1000 组，用 m 组 $\frac{y-10np}{\sqrt{n\cdot 10p(1-p)}}$ 的数据作频率直方图。

输入以下 Mathematica 语句，画出频率直方图如图 20-1。

```
<< Statistics`
```

```
<< Graphics`Graphics`
m = 1000; n = 50; p = 0.2;t = {}; dist = {};
For[i = 1, i <= m, i++,
  dist = RandomArray[BinomialDistribution[10, p], n];
  ysum = CumulativeSums[dist];
  nasum = (ysum[[n]] - 10*n*p)/Sqrt[n*10*p*(1 - p)]; t = Append[t, nasum];]
Histogram[t, FrequencyData -> False];
```

观察图 20-1 可以看出：当原始分布是二项分布，n 比较大时，n 个独立同分布的随机变量之和近似于正态分布。

练习 4 改变 n，p，重作实验 3，并与正态分布 $N(0,1)$的概率密度图形进行比较。

练习 5 改变原始分布为泊淞分布，重作实验 3。

实验 4 中心极限定理的直观演示——原始分布是连续分布。

(1) 产生服从均匀分布 $U(0,1)$的 n 个随机数，取 n=50，计算 n 个随机数之和 y 以及 $\dfrac{y-\frac{n}{2}}{\sqrt{n/12}}$；

(2) 将（1）重复 m=1000 组，用 m 组 $\dfrac{y-\frac{n}{2}}{\sqrt{n/12}}$ 的数据作频率直方图。

输入以下 Mathematica 语句，可画出频率直方图如图 20-2。

```
<< Statistics`
<< Graphics`Graphics`
m = 1000; n = 500; a = 0; b = 1;t = {}; dist = {};
For[i = 1, i <= m, i++,   dist = RandomArray[UniformDistribution[a, b], n];
  ysum = CumulativeSums[dist]; nasum = (ysum[[n]] - n/2)/Sqrt[n/12];
  t = Append[t, nasum];]
Histogram[t, FrequencyData -> False];
```

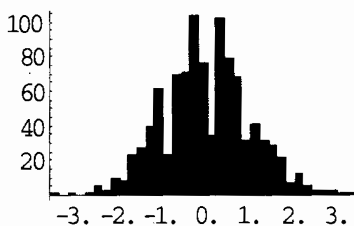


图 20-1

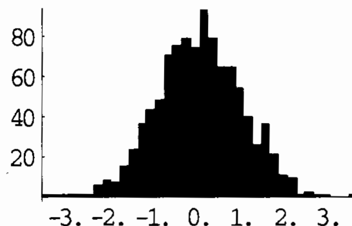


图 20-2

由图 20-2 可以看出：当原始分布是均匀分布，n 比较大时，n 个独立同分布的随机变量之和近似于正态分布。

练习 6 改变 n 以及均匀分布参数 a, b，重作实验 4，并与正态分布 $N(n\cdot\frac{a+b}{2}, n\cdot\frac{(b-a)^2}{12})$ 的概率密度图形进行比较。

练习 7 改变原始分布为指数分布，重作实验 4。你能得到什么结论？并从中体会中心极限定

理的含义。

实验 5 中心极限定理的应用——戏院设座问题

甲、乙两个戏院在竞争 1000 名观众，假定每个观众完全任意地选择两戏院中的一个戏院，且观众选哪个戏院彼此间是相互独立的。问每个戏院至少应设多少个座位才能保证因缺少座位而使观众离去的概率小于 0.1？

解：由于两戏院情况相同，只需考虑甲戏院即可。

设 1000 名观众中选择甲戏院的人数为 X，依题意，$X \sim B(1000, 0.5)$。再设甲戏院需设 m 个座位，问题为求 m，使 $p\{X > m\} < 0.1$。

由于 n 很大，$np = 500$，$np(1-p) = 250$，由隶莫佛－拉普拉斯定理，有

$$S_n = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，因此

$$p\{X > m\} = 1 - p\{X \leqslant m\} = 1 - p\left\{S_n \leqslant \frac{m-500}{\sqrt{250}}\right\}$$

$$\approx 1 - \Phi(\frac{m-500}{\sqrt{250}})$$

欲使 $1 - \Phi(\frac{m-500}{\sqrt{250}}) < 0.1$，即 $\Phi(\frac{m-500}{\sqrt{250}}) \geqslant 0.9$，查正态分布表可得：

$$\frac{m-500}{\sqrt{250}} \geqslant 0.9$$

解得 $$m \geqslant 521$$

乙戏院的情况完全类似。即每个戏院至少应设 521 个座位才能保证因缺少座位而使观众离去的概率小于 0.1。

输入以下 Mathematica 语句进行模拟，其中用 0 表示选择甲戏院的人，1 表示选择乙戏院的人。

```
<< Statistics`
<< Graphics`Graphics`
n = 1000; t = {}; dist = {};t1 = {100, 365, 500, 730, 1000};
For[j = 1, j <= Length[t1], j++, m = t1[[j]];
  For[i = 1, i <= m, i++, dist = RandomArray[BinomialDistribution[1, 0.5], n];
    dist1 = Frequencies[dist];
    If[dist1[[1]][[1]] > 521, times = times + 1, times];];
  t = Append[t, {t1[[j]], times, N[times/m]}]; times = 0;]
TableForm[t, TableHeadings -> {None, {"n", "times", "frequence"}}]
```

(1) 产生 1000 个服从两点分布 $B(1,0.5)$的 0.1 随机数，统计出现 0 的个数 n_0，若 $n_0 > 521$，则计数一次；

(2) 将（1）重复 N 组，计数结果填入表 20-3 并与离去概率比较。

表 20-3

N	100	365	500	730	1000
因无座而离去天数	12	33	48	61	88
离去频率	0.12	0.09	0.096	0.084	0.088
离去概率			0.1		

练习 8 高尔顿钉板试验的理论解释

回忆实验十七中的高尔顿钉板试验，若设 n 是钉子的横排排数，引入随机变量

$$X_i=\begin{cases}1,\text{第}i\text{次碰钉后小球向左}\\-1,\text{第}i\text{次碰钉后小球向右}\end{cases}i=1,2,\cdots,n$$

由于小球下落过程中碰到钉子时，从左边落下与从右边落下的机会相等，因此

$$X_i\sim\begin{pmatrix}-1, & 1\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

可求得　$E(X_i)=0,\ \ D(X_i)=1, n=1,2,\cdots$。令 Y_n 表示 n 次碰钉后小球的位置，即

$$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

由中心极限定理，当 n 充分大时，$Y_n/\sqrt{n}$ 的分布近似于标准正态分布 $N(0,1)$。也就是说，Y_n 的分布近似于正态分布 $N(0,n)$。若钉板有 n=16 层，可以求出标准差 $\sigma=\sqrt{16}=4$，根据正态分布的查表计算知道，落在 20 以内即中线左右 8 颗钉子以内的概率近似为 95.6%，落在这以外的概率只有 4%左右。

下面进行模拟：

(1) 作 N=300 次小球碰钉试验，将小球落下位置记录在同一个图里，并画其落下位置的频率直方图，与正态分布 $N(0,4^2)$的概率密度图形相比较；

(2) 增加试验次数 N，重复上面试验过程。

实验二十一　数理统计的基本概念

数理统计是研究大量随机现象的统计规律性的一门数学科学，它以概率论为基础研究如何用有效的方式收集、整理和分析受到随机性影响的数据，并作出种种合理的估计和判断。

本实验的主要目的是通过观察加深对基本概念的理解及从图形角度了解常用统计分布。

21.1　F 分布

F 分布：设$U \sim \chi^2(n_1)$，$V \sim \chi^2(n_2)$，且U,V独立，则称随机变量

$$F=\frac{U/n_1}{V/n_2}$$

服从自由度为(n_1,n_2)的 F 分布，记为$F \sim F(n_1,n_2)$。

实验 1　F 分布。

(1) 固定$n_2=5$，分别取参数$n_1=2,10,100$，观察 F 分布的概率密度图形随参数n_1的变化情况。

(2) 固定$n_1=5$，分别取参数$n_2=2,10,100$，观察 F 分布的概率密度图形随参数n_2的变化情况。

解：输入以下 Mathematica 语句，得到 F 分布的概率密度图形随参数n_1的变化如图 21-1。

```
Plot[{PDF[FRatioDistribution[2, 5], x], PDF[FRatioDistribution[10, 5], x],
    PDF[FRatioDistribution[100, 5], x]}, {x, 0, 4},
  PlotStyle -> {{Thickness[0.008], RGBColor[1, 0, 0]}, {Thickness[0.01],
      RGBColor[0, 0, 1]}, {Thickness[0.01], RGBColor[0, 1, 0]}}];
Plot[{PDF[FRatioDistribution[5, 2], x], PDF[FRatioDistribution[5, 10], x],
    PDF[FRatioDistribution[5, 100], x]}, {x, 0, 4},
  PlotStyle -> {{Thickness[0.008], RGBColor[1, 0, 0]}, {Thickness[0.01],
      RGBColor[0, 0, 1]}, {Thickness[0.01], RGBColor[0, 1, 0]}}];
```

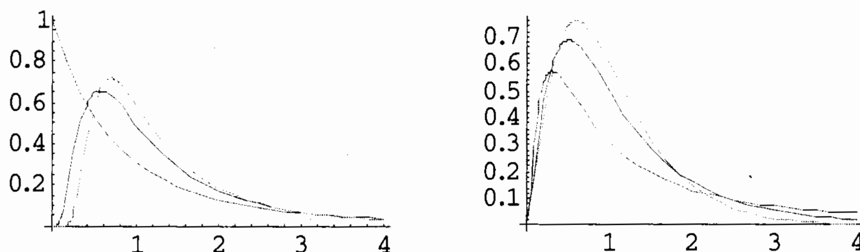


图 21-1　(左图为固定$n_2=5$，右图为固定$n_1=5$的变化情况。)

练习 1 分别改变 n_1, n_2 的固定值，重做实验 1。

练习 2 研究 F 分布的概率密度图形随参数 n_1, n_2 的变化情况，试给出你的结论。

21.2 统计量及抽样分布

实验 2 设 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right), X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本，则样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的抽样分布为 $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$。

(1) 取 $n=10$，$\mu=0$ 及 $\sigma^2=1$，在同一坐标系下画出正态总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 和 $\overline{X}$ 的抽样分布 $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ 的概率密度图形；

(2) 固定 $\mu=0$ 及 $\sigma^2=10$，分别取 $n=10,20,30,50,100$，在同一坐标系下画出来自正态总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的不同样本容量的 $\overline{X}$ 的分布。

解：(1) 输入以下 Mathematica 语句，得到图形如图 21-2。

```
<< Statistics`
<< Graphics`Graphics`
Plot[{PDF[NormalDistribution[0, 1], x], PDF[NormalDistribution[0, Sqrt[1/10]], x]},
    {x, -4, 4}, PlotStyle -> {{Thickness[0.008], RGBColor[1, 0, 0]}, {Thickness[0.01],
    RGBColor[0, 0, 1]}}, PlotRange -> All];
```

(2) 输入以下 Mathematica 语句，得到图形如图 21-3。

```
Plot[{PDF[NormalDistribution[0, 1], x], PDF[NormalDistribution[0, Sqrt[1/2]], x],
PDF[NormalDistribution[0, Sqrt[1/2]], x], PDF[NormalDistribution[0, Sqrt[1/5]], x],
PDF[NormalDistribution[0, Sqrt[1/10]], x]}, {x, -4, 4}, PlotStyle -> {{Thickness[0.008],
RGBColor[1, 0, 0]}, {Thickness[0.01], RGBColor[0, 0, 1]}}, PlotRange -> All];
```

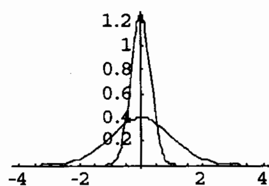


图 21-2

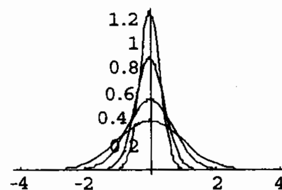


图 21-3

由图 21-3 可以看出：

(1) 虽然每个个体 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 与总体的分布相同，但样本均值更密集在总体均值的附近；

(2) 随着样本容量的增大，样本均值的取值越来越密集在 μ 的附近。

因此样本均值这一统计量比任何一个直接从总体中抽出来的个体能更集中地反映总体均值的信息。

练习 3 设 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right), X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本，样本方差为：

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$$

则

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

(1) 取$n=20$，$\sigma=1$，自行选定μ，画出统计量$Y=(n-1)S^2$的抽样分布概率密度图；

(2) 对选定的μ，固定$n=20$，分别取$\sigma=0.1,1,4$时，在同一坐标系下画出统计量$Y=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$的抽样分布概率密度图，观察统计量$Y$的概率密度图形随参数$\sigma$的变化情况；

(3) 固定μ及σ，分别取 n=10,20,40，在同一坐标系下画出统计量$Y=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$的抽样分布概率密度图；观察统计量$Y$的概率密度图形随样本容量大小的变化情况。

实验 3

(1) 取$\mu=5.0,\sigma^2=1.0,n=100$, 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是取自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本值（可用产生$n$个服从$N(\mu,\sigma^2)$分布的随机数来模拟），计算对应的样本均值与样本方差填入表21-1：

(2) 将过程（1）重复五组。

表 21-1

总体	样本				
	第一组	第二组	第三组	第四组	第五组
均值 5.0	4.92894	4.863	4.91194	4.9434	4.97831
方差 1.0	1.13319	1.34155	0.939327	1.11125	0.829819

你能得到什么结论？

解：输入以下 Mathematica 语句进行模拟，结果如表 21-1。

```
<< Statistics`
<< Graphics`Graphics`
n = 100; t = {};
For[i = 1, i <= 5, i++,
    dist = RandomArray[NormalDistribution[5, 1], n];      mean = Mean[dist];
    d = Variance[dist];   t = Append[t, {i, mean, d}];];
TableForm[t, TableHeadings -> {None, {"group", "mean", "variance"}}]
```

由表 21-1 可以看出：在样本容量固定的情况下，因为每次抽样不同，故每次样本均值、样本方差都有不同，是随机变量；但样本均值与总体均值，样本方差与总体方差相差很小，可以看作近似相等。

练习 4 改变n，重做实验 3，你能得到关于样本容量与近似程度的什么结论？

实验 4 经验分布函数

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是取自总体 $F(x)$的一个样本观察值，若把这些观察值由小到大排列成$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$。则称函数

$$F_n(x)=\begin{cases}0, x<x_{(1)} \\ \dfrac{k}{n}, x_{(k)}\leqslant x<x_{(k+1)} \\ 1, x\geqslant x_{(n)}\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

为经验分布函数。

(1) 取 $\mu=5.0,\sigma^2=1.0,n=100$, 产生 n 个服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布的随机数作为取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，画出它的经验分布函数，并与总体分布函数进行比较；

(2) 将过程（1）重复 3 组。

输入以下 Mathematica 语句，得到经验分布函数与总体分布函数的图形如图 21-4。

```
<< Statistics`
<< Graphics`Graphics`
Clear[n, k, t1]; n = 100; t = {};
For[i = 1, i <= 3, i++, dist = RandomArray[NormalDistribution[5, 1], n];
  t = Sort[dist]; t1 = Table[{t[[k]], k/n}, {k, 1, n}];
  t1 = Append[t1, {t[[n]], 1}]; t1 = Append[t1, {t[[n]] + 1, 1}];
  g1 = Plot[CDF[NormalDistribution[5, 1], x], {x, t[[1]] - 1, t[[n]] + 1},
      PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], DisplayFunction -> Identity];
  g2 = ListPlot[t1, PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity];
  Show[g1, g2, DisplayFunction -> $DisplayFunction];]
```

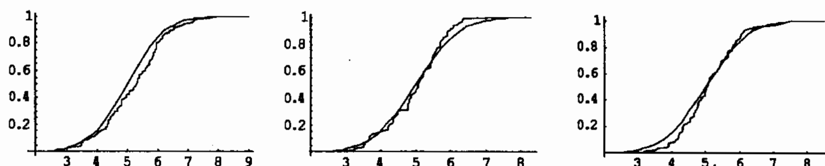


图 21-4

对不同的样本值，得到的经验分布函数不同，事实上，$F_n(x)$ 是观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于或等于 x 的频率，它是一个以等概率仅取 n 个值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的离散性随机变量的分布函数。当样本容量较大时，经验分布函数 $F_n(x)$ 是总体分布函数 $F(x)$ 的良好近似。而且一般 n 越大，近似得越好。这正是著名的格列汶科定理所阐述的内容：

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|F_n(x)-F(x)\right|=0\right)=1$$

练习 5 改变 n，重做实验 4，进一步体会格列汶科定理的内涵。

练习 6 产生服从均匀分布 $U(0,1)$的一组随机数作为样本值，试画出经验分布函数，并在同一坐标系下画出 $U(0,1)$的分布函数进行比较。

实验 5 直方图。假定某班 60 个男生身高（单位：cm）数据如下：

166，169，181，173，165，169，170，163，175，164，171，162，156，159，173，168，167，165，172，170，180，177，161，170，164，163，172，167，157，165，168，174，165，168，

162，163，159，163，167，173，161，160，165，160，173，164，166，152，163，164，176，160，164，167，158，172，167，168，167，170

现在希望通过这些数据找出该班身高的分布情况。

解：可以用频率直方图来粗略地描述总体的分布，基本步骤为：

第一步：找出它们的最大值为 181，最小值 152，极差 $R=181-152=29$。

第二步：分组定组距：

分组没有一定的通用原则，通常当数据个数 $n\geqslant 50$，分成 10 组以上；当 $n<50$ 时，一般分 5 组左右。分组数 m 确定后，可按

$$\frac{R}{m}<d\leqslant\frac{R}{m-1}$$

来确定组距 d。

本实验中，将数据分成 10 组，组距为 3。

第三步：定分点，定区间：

取起点 a=151.5，终点 181.5。从而得作图区间为[151.5,181.5]（注意，我们取各组的边界值比身高多一位小数，为的是使每个身高都落在一个组的内部）。

第四步：样本值落入各组的频数和频率如表 21-2：

表 21-2

身高分组/cm	频 数	频 率
151.5~154.5	1	0.017
154.5~157.5	2	0.033
157.5~160.5	5	0.083
160.5~163.5	9	0.150
163.5~166.5	13	0.217
166.5~169.5	12	0.200
169.5~172.5	8	0.133
172.5~175.5	6	0.100
175.5~178.5	2	0.033
178.5~181.5	2	0.034

它给出了该班同学中不同身高组的同学在全班中所占比例。

第五步：作频率直方图如图 21-5。

实现以上步骤的 Mathematica 语句为：

```
<< Statistics`
<< Graphics`Graphics`
data = {166, 169, 181, 173, 165, 169, 170, 163, 175, 164, 171, 162, 156, 159, 173, 168, 167, 165, 172, 170, 180, 177, 161, 170, 164, 163, 172, 167, 157, 165, 168, 174, 165, 168, 162, 163, 159, 163, 167, 173, 161, 160, 165, 160, 173, 164, 166, 152, 163, 164, 176, 160, 164, 167, 158, 172, 167, 168, 167, 170};max = Max[data]
min = Min[data]
SampleRange[data]
t = BinCounts[data, {151.5, 181.5, 3}]
dist = Table[{t[[k]], 151.5 + 3*(k - 1)}, {k, 1, 10}];BarChart[dist];
```

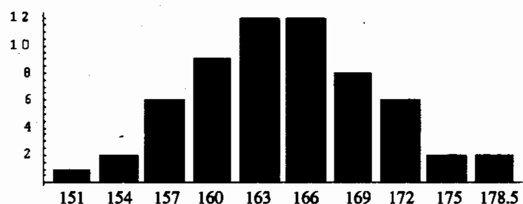


图 21-5

直方图是最常用的一种表现数据的方法。它通常把值域分成若干相等的区间，于是数据就按区间分成若干组，每组做成一个矩形，其高和该组中数据的多少成比例，其底为所属区间。这些矩形就是直方图，它给数据的分布一个直观的形象。本实验给出的是频率直方图，它以组距为底，以频率为高作矩形。

它有三个特点：

(1) 每个小长方形的面积等于该组的频率；

(2) 所有的小长方形的面积之和等于 1；

(3) 介于任何两条直线 $x=a$ 和 $x=b$ 之间的面积等于身高落在该区间的频率。

可以想象，若我们得到了一所大学男大学生（比如有上千人）的数据，这时，直方图的分组数增多，组距变得很小，画出的直方图顶端阶梯形近似成一条曲线。于是，可以用这条曲线近似描述该大学生的身高的分布规律。曲线下界于直线 $x=a$ 和 $x=b$ 之间的面积近似等于身高位于 a 与 b 之间的概率。

练习 7 改变实验 7 中的组距，重做实验 7，并将所得到的图形与图 21-5 比较，你能得到什么结论？

练习 8 设总体 X 服从正态分布 $N(4,1), x_1,\cdots,x_n$ 为取自该总体的一组样本值。根据这组样本值作出频率直方图，用直方图来近似密度并与密度图比较。

实验二十二　统计推断

统计推断是数理统计学中的一个重要部分，它是利用样本的资料，对总体的某些性质进行估计或做出判断，从而达到认识总体的目的。统计推断的内容大致可分为两个方面：一是参数估计，二是统计假设检验。本实验的主要目的是通过观察和分析实验结果，加深对统计推断的基本概念和基本思想的理解。

22.1 点估计

22.1.1 点估计

点估计就是适当地选择一个统计量作为未知参数的估计（称为估计量），将样本值代入估计量，以得到的估计量的值作为未知参数的近似值（称为估计值）。

常用求点估计的方法有矩估计法和极大似然估计法。矩估计法是以样本矩作为相应总体矩的估计量，得到总体未知参数θ的估计；极大似然估计法的基本思想是在参数域中选取θ使样本点出现概率为最大，从而θ就是未知参数的估计。

实验 1　设样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$取自总体$U(a,b)$，a,b为未知参数,试求a,b的矩估计和极大似然估计。

解：a,b的矩估计量分别为：

$$\hat{a}_1=\bar{X}-\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\ ,\quad \hat{b}_1=\bar{X}+\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} \tag{22-1}$$

极大似然估计量分别为：

$$\hat{a}_2=\min_{1\leq i\leq n}X_i,\quad \hat{b}_2=\max_{1\leq i\leq n}X_i \tag{22-2}$$

下面进行模拟：

(1) 取$a=0,b=1$，$N=50$，产生N个服从分布$U(a,b)$的随机数当作样本值，分别代入（1）、（2）式计算a,b的估计值，并与理论值0,1比较；

(2) 将（1）重复10次，用10次估计值的平均值作为a,b的估计，并与（1）的结果比较，体会其中包含的概率思想。

练习 1　增加N，重复（1），并与（1）的结果比较，体会其中蕴含的概率思想。

练习 2　设样本值$x_1,x_2\cdots,x_n$来自总体$N(\mu,\sigma^2)$（自行选定μ,σ^2），试求μ,σ^2的矩估计值和极大似然估计值。

练习 3　设样本值$x_1,x_2\cdots,x_n$来自总体$B(20,p)$（自行选定p），求p的矩估计值和极大似然估

计值。

练习 4 设样本值$x_1,x_2\cdots,x_n$来自总体$\pi(\lambda)$（自行选定λ），求λ的矩估计值(分别用一阶和二阶样本矩估计)和极大似然估计值，填入表 22-1 中。

表 22-1

估计	样本容量		
	N=50	N=100	N=200
（一阶矩）$\hat{\lambda}_1=\bar{X}$ （二阶矩）$\hat{\lambda}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ （极大似然）$\hat{\lambda}_3=\bar{X}$			

实验 2 捕鱼问题

湖中有鱼，其数不知。现在请你想一个办法，能将湖中的鱼数大致估计出来。

解法 1：设湖中有N条鱼。先捕出r条鱼，做上记号后放回湖中（设记号不消失），让湖中的鱼充分混合后，再从湖中捕出s条鱼，设其中有T条鱼标有记号，则T是随机变量，且服从超几何分布

$$P\{T=t\}=\frac{C_r^t C_{N-r}^{s-t}}{C_N^s}，(0\leqslant t\leqslant r)$$

应用极大似然估计思想，寻找N，使$P\{T=t\}$达到最大。得

$$N=\frac{sr}{t}$$

于是取$\hat{N}=\left[\frac{sr}{t}\right]$作为湖中鱼数的一种估计，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数。

解法 2：用矩估计法。因为T是超几何分布，其数学期望是

$$E(T)=\frac{sr}{N}$$

此即抓s条鱼得到有标记的鱼的总体平均数。而现在只捕一次，出现t条有标记的鱼，由矩估计法，令总体一阶原点矩等于样本一阶原点矩，即$\frac{sr}{N}=t$，也得$\hat{N}=\left[\frac{sr}{t}\right]$。

取湖中的鱼数为N=3000，设湖中做记号的鱼数为r=1000，下面进行模拟试验：

(1) 在 1~3000 中随机选取r=1000 个数作标记，再从 1~3000 中随机选取s=100 个数，统计 100 个数中有标记的数作为t，记录试验结果并填入表 22-2。

表 22-2

捕出的鱼数 s	100	300	500	700	1000
有记号的鱼	39	108	165	238	313
有记号的鱼的频率	0.39	0.36	0.33	0.34	0.313
湖中鱼的估计	2564	2777	3030	2941	3194
湖中实际鱼数	3000				

(2) 改变 s=300,500,700,1000，重复过程（1）。

练习 5 改变 N 及 r，重做实验 2。

思考：若湖中做记号的鱼数及捕出的鱼数不变，如何增加估计的可信度？

练习 6 有两个外形完全相同的箱子，一个箱子中装有 99 个白球，1 个红球。另一个箱子中装有 1 个白球，99 个红球。现从两个箱子中任取一箱，从中任取一球。请根据取球结果估计箱中白球数与红球数之比是 $1/99$ 还是 $99/1$。并模拟之。

22.1.2 点估计的评选标准

我们知道，对于同一待估的参数，可以构造许多个估计量，那么如何衡量估计量的优劣呢？由于估计量是一随机变量，在考虑估计量的优劣时，不能从一个估计量的某次表现上去衡量，而应看其整体性质。即从估计量的概率分布的性质上，去考察估计量的优良性。据此，提出三条标准：

(1) 一致性：指样本容量 $n\to\infty$ 时，估计量 $\hat{\theta}$ 具有趋于被估计参数 θ 的渐近性质，即 $p\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right|<\varepsilon\right\}\to 1$；

(2) 无偏性：指不论 n 的大小如何，总有 $E(\hat{\theta})=\theta$；

(3) 有效性：若 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 都是参数 θ 的无偏估计量，但 $D(\hat{\theta}_1)\leqslant D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效。这一性质反映了估计量在 θ 周围的集中情况。

实验 3 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$，取 $\mu=0$，从总体抽取 10 组容量为 20 的样本，分别以 $\bar{X}$ 和 X_1 作为总体均值 μ 的估计量，计算 10 组估计值，并将估计值描在图上。

解：作出估计，并给出图形如图 21-1（$\bar{x}$ 作为估计量）、图 21-2（x_1 作为估计量）。

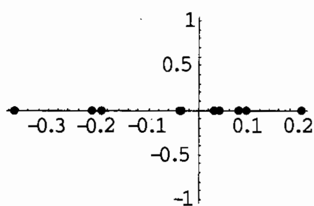


图 21-1

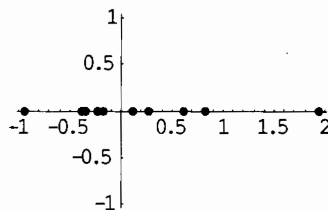


图 22-2

可以看到：(1)因为估计量是一随机变量，每组抽样计算所得估计值具有偶然性，所以“无偏性”是指同总体多次抽样所得估计值的平均值接近真参数值，而非一次抽样所得估计值就是真参数值。

(1) 显然，$\bar{X}$ 的取值更集中在 μ 的附近，因此 $\bar{X}$ 比 X_1 有效。事实上，虽然样本均值 $\bar{X}$ 及 X_1 都是总体均值 μ 的无偏估计。但 $D(\bar{Z})=\dfrac{\sigma^2}{n}\leqslant D(X_1)=\sigma^2$。

22.2 区间估计

参数的点估计是用样本值算得一个数值作为参数 θ 的估计值，而区间估计是以满足条件

$\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)\leqslant\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$的两个统计量$\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$为端点的区间（$\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$），当有了样本$x_1,\cdots,x_n$时，就把θ估计在区间$(\hat{\theta}_1(x_1,\cdots,x_n),\hat{\theta}_2(x_1,\cdots,x_n))$之内。区间估计也常称为置信区间。

例题 置信区间的非唯一性。已知$x_1,x_2,\cdots,x_n$来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，其中$\sigma=1$，取$\alpha=0.05$，求置信度为0.95的μ的置信区间。

解：当总体X具有正态分布时，样本均值具有正态分布$N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，即$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$。它的密度函数$f(u)$不依赖于任何参数。对于给定的置信度$1-\alpha=0.95$，可定出两个常数$a,b$，使$P\{a<U<b\}=\Phi(b)-\Phi(a)=0.95$。如取$a=-1.96$，则$b=1.96$，有$P\{-1.96<U<1.96\}=0.95$，此式等价于

$$P\left\{\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=0.95$$

也就是说$(\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$是$\mu$的一个置信度为95%的置信区间。

改变a，因为$\Phi(b)=0.95+\Phi(a)$，查表可求出b的值，均满足

$$P\{a<U<b\}=0.95$$

因此$(\bar{x}+a\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+b\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$都可作为$\mu$的置信度为95%的置信区间。

下面进行模拟：取$\mu=0$，$n=20$，产生n个服从正态分布$N(\mu,1)$的随机数，分别取$a=-1.96,-1.80,-1.70,-2.10,-2.58$，由$\Phi(b)=0.95+\Phi(a)$计算$b$，从而得到置信区间$(\bar{x}+a\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+b\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$，试验结果填入表22-3：

表 22-3

a	-1.96	-1.80	-1.70	-2.10	-2.58
b	1.96	2.195	2.55	1.85	1.695
$\bar{x}+a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	-0.3582	-0.0989	-0.1464	-0.5914	-0.9281
$\bar{x}+b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	0.5183	0.7944	0.8039	0.2918	0.0278
$\frac{(b-a)\sigma}{\sqrt{n}}$	0.8765	0.8933	0.9503	0.8832	0.9559

表中最后一行是置信区间的长度，可以看出，当a,b取不同的值时，求得置信区间的长短不同，但置信度均为95%。可见，置信区间并不唯一，区间长度也不一样。考虑到置信区间短表示估计的精度高，因此我们使用最短的置信区间。在概率密度函数为单峰且对称（如正态

分布）的情形，当 $a=-b$ 时求得的置信区间最短，常取 $a=-z_{\frac{\alpha}{2}}$，$b=z_{\frac{\alpha}{2}}$，其中 z_α 为标准正态分布的上 α 分位点。

练习 7　分别取 b 的一些值，由 $\Phi(a)=\Phi(b)-0.95$ 计算 a，重作实验 4。

实验 5　置信区间的频率解释。设某地区成年女子的身高 $X \sim N(\mu,1)$，随机抽取容量为 n 的子样 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，求总体均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间。

解：已知 $\alpha=1-0.95=0.05$，$\sigma=1$，置信度为 95%的置信区间为：$\left(\bar{X}-1.96/\sqrt{n}, \bar{X}+1.96/\sqrt{n}\right)$（$\bar{X}$ 为样本均值，样本容量为 n）。

下面进行模拟试验：

(1) 取总体 $X \sim N(\mu,1)$，随机抽取 20 组容量为 10 的子样，计算 μ 的置信度为 0.95 的置信区间，并将所得区间描在图 22-3（若所得区间包含 μ 则区间线与水平线相交）：

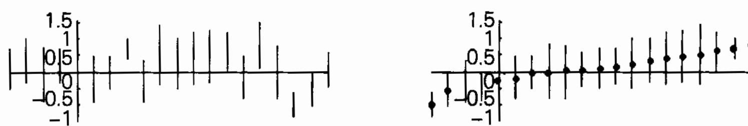


图 22-3

(2) 改变试验参数，取容量 $n=20$，随机抽取 $m=20, 30, 50, 100$ 组子样。统计试验结果并填表 22-4：

表 22-4

m	包含真值区间个数	不含真值区间个数	包含真值区间的出现频率	置信度
10	9	1	0.90	
20	19	1	0.95	
30	29	1	0.97	0.95
40	40	0	1	
50	47	3	0.94	

事实上，当样本未取定时，$\left(\bar{X}-1.96/\sqrt{n}, \bar{X}+1.96/\sqrt{n}\right)$ 是随机区间，对于不同的样本值取到不同的区间，在这些区间中，有些包含参数的真值，有些则不包含。从表 22-4 可以看出：当置信度为 0.95 时，在随机区间的若干个观察值中，大约有 95%的区间包含参数的真值，而对具体的一个来说，它包含真值的概率为 95%，也就是说，该区间包含参数的真值这个事实的可靠程度为 95%。我们相信这个事实，犯错误的可能性为 5%。

练习 8　改变置信度以及样本容量，重作实验 5。

练习 9　观察样本容量对置信区间的影响。

考虑正态总体 $N(\mu,1)$ 的均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间：

$$(\bar{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \bar{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

随机抽取 50 组容量分别为 n =4,25,100 的子样，计算 μ 的置信度为 0.95 的置信区间。你能得到什么结论？

实验 6 置信度对置信区间的影响。下面是常用的三种置信度：

$$\alpha=0.1,\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1.64;\ \alpha=0.05,\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96;\ \alpha=0.01,\ z_{\frac{\alpha}{2}}=2.58;$$

考虑正态总体 $N(\mu,1)$ 的均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间：

$$(\overline{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}},\quad \overline{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}})$$

取总体 $X\sim N(0,1)$，随机抽取 50 组容量为 10 的子样，分别取 $\alpha=0.5,\alpha=0.1,\alpha=0.01$，计算相应的置信区间，为了观察方便，将所得区间中心排序后分别描在图 22-4、图 22-5、图 22-6：

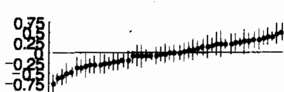


图 22-4 $\alpha=0.5$

图 22-5 $\alpha=0.1$

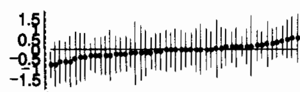


图 22-6 $\alpha=0.01$

可以看出：① 置信度为 $1-\alpha=0.5$ 的置信区间中包含参数真值的大概有 50%。而置信度为 0.99 的置信区间中包含参数真值的比例就很高了。即置信水平越高，置信区间包含参数的真值概率就越大，根据实际问题一般选置信度为 0.90，0.95，0.99。

② 对同样的样本容量，置信水平越高，置信区间长度越长。

练习 10 改变样本容量，重作实验 6。

22.3 假设检验

假设检验是一类重要的统计推断问题，它是根据样本所提供的信息，检验关于总体的某个假设 H_0 是否正确。根据实际推断原理，若原假设 H_0 为真，而样本值提供的是小概率事件，则作出拒绝原假设 H_0 的决定，否则作出接受 H_0 的决定。

考虑到作出决策的依据是一个样本，因此在进行假设检验时，有可能犯两类错误：① 若原假设 H_0 成立，而做出拒绝 H_0 的结论，称作犯第一类错误，犯第一类错误的概率记作 α；② 若原假设 H_0 不成立，而做出接受原假设的结论，称作犯第二类错误，犯第二类错误的概率记作 β。这两类错误如表 22-5 所示：

表 22-5

事实 / 决策	原假设为真	原假设不真
拒绝概率	错误 α	正确 1- β
接受概率	正确 1- α	错误 β

实验 7 样本容量一定时，两类错误的关系。

考虑关于正态总体 $N(\mu,1)$ 的均值 μ 的假设检验：

$$H_0:\quad \mu=\mu_0 \qquad H_1:\quad \mu=\mu_1\neq\mu_0$$

(1) 在同一坐标系下画出两总体$N(0,1)$与$N(0.5,1)$的概率密度图（其中$\mu_0=0,\mu_1=0.5$），并标出犯第一类错误的概率为$\alpha=0.05$时的一个临界点$x=z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$，则临界点右方，$N(0,1)$概率密度曲线与$x$轴之间所夹区域表示犯第一类错误的概率的一半$\frac{\alpha}{2}$，而临界点左方，$N(0.5,1)$概率密度曲线与$x$轴之间所夹区域表示犯第二类错误的概率$\beta$；

(2) 改变犯第一类错误的概率α，即改变临界点分别为$x=1.64,2.58$，如图22-7所示，观察第二类错误的变化情况。

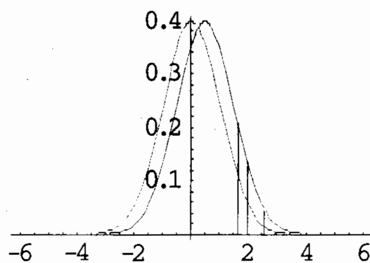


图 22-7

从图22-7中可以看到：当临界点变小时，犯第一类错误的概率α增大，同时，犯第二类错误的概率β变小；而当临界点增大时，犯第一类错误的概率α减小，犯第二类错误的概率β却增大。

可见，当样本容量一定时，我们不能同时控制两类错误的概率。在实际当中，通常限制犯第一类错误的概率α，即给定显著性水平α。

练习 11 分别改变$\mu_1=0.3,\mu_1=0.1$，重复过程(1)，你能得到什么结论？

实验 8 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自正态总体$N(\mu,1)$的样本，在显著性水平$\alpha=0.05$下检验假设：

$$H_0:\ \mu=0 \qquad H_1:\ \mu\neq 0\ （取\mu=\mu_1>0）$$

试通过计算机模拟验证：犯第一类错误的概率一般不超过$\alpha=0.05$。

解：模拟步骤如下：

(1) 随机产生取自正态总体$N(0,1)$的m组样本，m=100，每组样本的容量m=20；

(2) 对每组样本，求得μ的实测值，看是否落入拒绝域内，若是，则计数一次，统计拒绝次数，并计算拒绝次数t，以t/m作为犯第一类错误的频率；

(3) 改变样本组数m，重复过程（1），（2），统计结果并填入表22-6：

表 22-6

m	不能拒绝次数	拒绝次数	犯第一类错误频率
100	97	3	0.03
300	287	13	0.0433
700	676	24	0.0343
1500	1421	79	0.0527
2000	1916	84	0.042
5000	4734	266	0.0532

练习 12　分别改变 n 以及 α，重作实验 8，体会假设检验的意义。

附　Mathematica 程序

1. 实验 1 的程序

```
<< Statistics`
m = 10; n = 50; Clear[i]; t = {};
For[j = 1, j <= m, j++, aju10 = {}; bju10 = {}; amle10 = {}; bmle10 = {};
  rand = RandomArray[UniformDistribution[0, 1], n]; mean = Mean[rand];
  aju10 = Append[aju10, mean - Sqrt[3/n*Sum[(rand[[i]] - mean)^2, {i, 1, n}]]];
  bju10 = Append[bju10, mean + Sqrt[3/n*Sum[(rand[[i]] - mean)^2, {i, 1, n}]]];
  amle10 = Append[amle10, Min[rand]]; bmle10 = Append[bmle10, Max[rand]];
  t = Append[t, {Mean[aju10], Mean[bju10], Mean[amle10], Mean[bmle10]}];]
  TableForm[t, TableHeadings -> {None, {"aju", "bju", "amle", "bmle"}}]
```

2. 实验 2 的程序

```
<< Statistics`
r = 1000; s = {100, 300, 500, 700, 1000};out = {};
For[j = 1, j <= Length[s], j++, ss = s[[j]]; ts = {};
    For[i = 1, i <= ss, i++, aa = Random[Integer, {1, 3000}]; ts = Append[ts, aa]];
    t = Count[ts, x_ /; 1 <= x <= 1000]; n = Floor[ss*r/t];
    out = Append[out, {ss, t, N[t/ss], n}];];
TableForm[out, TableHeadings -> {None, {"s", "times", "frequencies", "Number"}}]
```

3. 实验 3 的程序

```
<< Statistics`
m = 10; n = 20; uju10 = {}; umle10 = {};
For[j = 1, j <= m, j++,
    rand = RandomArray[NormalDistribution[0, 1], n]; mean = Mean[rand];
    uju10 = Append[uju10, {mean, 0}]; umle10 = Append[umle10, {rand[[1]], 0}];];
g1 = ListPlot[uju10, PlotStyle -> PointSize[0.03]];
g2 = ListPlot[umle10, PlotStyle -> PointSize[0.03]];
```

4. 实验 4 的程序

```
<< Statistics`
m = 10; n = 20; sg = 1; out = {};
For[i = 1, i <= 5, i++,
    aa = {-1.96, -1.80, -1.70, -2.10, -2.58}; bb = {1.96, 2.195, 2.55, 1.85, 1.695};
    rand = RandomArray[NormalDistribution[0, sg], n];
    mean = Mean[rand]; al = mean + aa[[i]]*sg/Sqrt[n];
    bl = mean + bb[[i]]*sg/Sqrt[n]; cl = bl - al;
    out = Append[out, {aa[[i]], bb[[i]], al, bl, cl}];];
TableForm[out, TableHeadings -> {None, {"a", "b", "left", "right", "length"}}]
```

5. 实验 5 的程序

```
<< Statistics`
<< Graphics`
n = 10; k = 20;sample100 = Table[RandomArray[NormalDistribution[0, 1], n], {k}];
confidenceIntervals = Map[MeanCI[#] &, sample100];
num = Length[Select[confidenceIntervals, #[[1]] < 0 < #[[2]] &]]
ciPlot[confidenceIntervals_,mu_,n_,opts___]:=Show[Graphics[{Line[{{1,mu},
{n,mu}}],Table[Line[{{i,confidenceIntervals[[i,1]]},{i,confidenceIntervals[[i,2]]}}], {i,n}]}, Axes->
{False,True}, AspectRatio->0.3, PlotRange->All, opts]];
ciPlot[confidenceIntervals, 0, 20, DefaultFont :> {"Arial", 10}];
me = Transpose[{Range[k], Sort[Map[Mean,sample100]]}];
ciPlot[Sort[confidenceIntervals, Mean[#1]<Mean[#2]&], 0, k,
  Epilog->{PointSize[0.02], Map[Point,me]},DefaultFont:>{"Arial",10}];
times = {}; n = 20; m = 50;
For[k = 10, k <= m, k += 10,
  sample100 = Table[RandomArray[NormalDistribution[0, 1], n], {k}];
  confidenceIntervals = Map[MeanCI[#] &, sample100];
  num = Length[Select[confidenceIntervals, #[[1]] < 0 < #[[2]] &]];
  times = Append[times, num];];times
```

6. 实验 6 的程序

```
<< Statistics`
<< Graphics`
ciPlot[confidenceIntervals_, mu_, n_, opts_] :=
   Show[Graphics[{Line[{{1, mu}, {n, mu}}],
  Table[Line[{{i, confidenceIntervals[[i, 1]]}, {i, confidenceIntervals[[i, 2]]}}], {i, n}]},
  Axes -> {False, True}, AspectRatio -> 0.3, PlotRange -> All, opts]];
n = 10; k = 50; confidencelevel = {0.50, 0.90, 0.99};
For[i = 1, i <= Length[confidencelevel], i++,
  sample100 = Table[RandomArray[NormalDistribution[0, 1], n], {k}];
confidenceIntervals = Map[MeanCI[#, ConfidenceLevel -> confidencelevel[[i]]] &,
                    sample100];
num = Length[Select[confidenceIntervals, #[[1]] < 0 < #[[2]] &]];
me = Transpose[{Range[k], Sort[Map[Mean, sample100]]}];
ciPlot[Sort[confidenceIntervals, Mean[#1] < Mean[#2] &], 0, k,
Epilog -> {PointSize[0.02], Map[Point, me]}, DefaultFont :> {"Arial", 10}];]
```

7. 实验 7 的程序

```
<< Statistics`
<< Graphics`Graphics`
dist1 = NormalDistribution[0, 1];dist2 = NormalDistribution[0.5, 1];
g1 = Plot[{PDF[dist1, x], PDF[dist2, x]}, {x, -6, 6},];
```

```
g2 = Graphics[{Thickness[0.01],
        Line[{{1.96, 0}, {1.96, PDF[NormalDistribution[0.5, 1], 1.96]}}]}];
g3 = Graphics[{Thickness[0.01],
        Line[{{1.64, 0}, {1.64, PDF[NormalDistribution[0.5, 1], 1.64]}}]}];
g4 = Graphics[{Thickness[0.01],
        Line[{{2.58, 0}, {2.58, PDF[NormalDistribution[0.5, 1], 2.58]}}]}];
Show[g1, g2, g3, g4];
```

8. 实验 8 的程序

```
<< Statistics`
n = 20; m = {100, 300, 700, 1500, 2000, 5000}; out = {};
For[j = 1, j <= Length[m], j++, u = {};
    For[i = 1, i <= m[[j]], i++,
      dist = RandomArray[NormalDistribution[0, 1], n]; mean = Mean[dist];
      u = Append[u, mean]];
      accept = Count[u, x_ /; -1.96/Sqrt[n] <= x <= 1.96/Sqrt[n]];
      reject = m[[j]] - accept; errorfrequence = N[reject/m[[j]]];
      out = Append[out, {m[[j]], accept, reject, errorfrequence}];];
TableForm[out,
        TableHeadings -> {None, {"m", "accept", "reject", "errorfrequence"}}]
```

第二篇 研究实验

实验二十三 数列与级数

极限是微积分中最重要的基本内容之一。远在公元前 3 世纪，古希腊人阿基米德就采用了数列极限的思想来计算曲边三角形的面积。本实验的目的是通过计算机来发现数列的规律与极限状态的性质。

所谓一个无穷数列是指按一定顺序排列的一组数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots \tag{23-1}$$

而一个无穷级数则是由无穷项构成的和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots \tag{23-2}$$

数列与极限有着密不可分的关系。给定一个无穷级数（23-2），它唯一确定了一个无穷数列

$$S_1, S_2, \cdots$$

其中 $S_n = a_1 + \cdots + a_n$，$n = 1,2,\cdots$。反之，给定一个无穷数列（23-1），它也唯一地确定了一个无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，这里 $b_1 = a_1$，$b_n = a_n - a_{n-1}$，$n = 2,3,\cdots$。而且，无穷级数的和就是相应的无穷数列的极限。因此，无穷数列与无穷级数是可以转化的。

对于给定的数列 $\{a_n\}$，需要研究的问题是：

(1) 数列 a_n 有什么规律和性质。

(2) 当 $n \to \infty$ 时，数列 a_n 的极限是什么。

(3) 如果极限是无穷大，那么它趋向于无穷大的阶是多大。

(4) 如果数列的极限不存在，那么它在无穷大时的极限状态有怎么样？

对于给定一个无穷级数，也具有以上类似的问题。

本实验以斐波那契数列和调和级数为例来探讨上述问题。

23.1 斐波那契（Fibonacci）数列

13 世纪意大利著名数学家斐波那契在他的著作《算盘书》中记载着这样一个问题：

一对刚出生的幼兔经过一个月后可长成成兔，成兔再经过一个月后可以繁殖出一对幼兔。假设兔子不会死亡，问一年后总共有多少对兔子？

则兔子总数为以下数列：

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\cdots$$

其递推关系式由

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\ ,\ n=1,2,\cdots,\ F_1=1,\ F_2=1 \tag{23-3}$$

给出，该数列被称为斐波那契数列。

为考察斐波那契数列的极限与规律。我们用计算机算出斐波那契数列每一项的值，并在二维平面上画出顺次连接点(n,F_n)， $n=1,2,\cdots,N$ 的折线图，其中 N 是一个大整数。

实验 1 取 $N=20$，观察斐波那契数列的折线图。

解：斐波那契数列的折线图如图 23-1。

练习 1 分别取 $N=50,100,200,500$，观察斐波那契数列的折线图。斐波那契数列是否单调递增？它是否趋向于无穷？它增加的速度是快还是慢？

为进一步研究斐波那契数列 F_n 的特性，我们将 F_n 取对数，在直角坐标系中画出顺次连接点$(n,\ln F_n)$，$n=1,2,\cdots,N$ 的折线图如图 23-2，此时的折线图近似一条直线。因此，我们猜测 $\ln F_n$ 是 n 的线性函数。

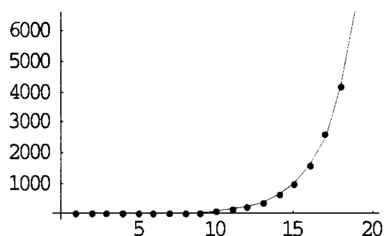


图 23-1 斐波那契数列的折线图

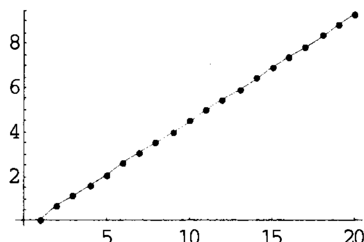


图 23-2 $(n,\ln F_n)$ 的折线图

实验 2 取 $n=20$，画出$(n,\ln F_n)$的折线图，并对以上数据进行拟合。

解：在直角坐标系中画出顺次连接$(n,\ln F_n)$， $n=1,2,\cdots,20$ 的折线图如图 23-2。对以上数据进行拟合得

$$\ln F_n=-0.347764+0.482955\text{n}$$

练习 2 分别取 $N=100,1000,2000,5000,10000$，用直线去拟合数据点$(n,\ln F_n)$，$n=1,2,\cdots,N$，由此求数列 F_n 的近似表示。注意观察 $\ln F_n$ 的线性项的系数，它与黄金分割数有何联系？

那么，怎样寻找斐波那契数列精确的通项公式呢？

斐波那契数列满足递推关系 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ ，称这样的递推关系为二阶线性（齐次）差分方程。

根据前面的观察，可以猜测数列 F_n 的通项具有指数形式，不妨设 $F_n=\lambda^n$，将 $F_n=\lambda^n$ 代入递推关系式（23-3），得到 $\lambda^{n+2}=\lambda^{n+1}+\lambda^n$。消去非零因子 λ^n，有 $\lambda^2=\lambda+1$。从而解得，$\lambda_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，$\lambda_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$。设 $F_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n$，代入（23-3）式，并由 $F_0=F_1=1$，即可确定常数 c_1和c_2 为

$$c_1=\frac{5+\sqrt{5}}{10}=\frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_1\ ,\ c_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_2 \tag{23-4}$$

因此，斐波那契数列的通项公式为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \tag{23-5}$$

斐波那契数列与自然界中的许多现象，如植物的枝干与叶子的生长，有密切联系。它在纯数学领域的一个极为成功的应用是协助苏联数学家马蒂雅舍维奇解决了著名的希尔伯特（Hilbert）第十问题。此外，它在优化、运筹以及计算机科学与艺术领域都有着极大的应用价值。下面给出斐波那契数列的几个例子。

例 1.（蜜蜂的"家谱"）蜜蜂的繁殖规律十分有趣。蜂后所产的卵，受精的孵化为雌蜂（及工蜂或蜂后），未受精的孵化为雄蜂。在追溯雄蜂的家谱时，一只雄蜂的第 n 代子孙数目刚好就是斐波那契数列的第 n 项 F_n。

例 2.（钢琴音阶的排列）钢琴的 13 个半音阶，其排列完全与雄蜂第 6 代的排列情况相同，音阶排列与斐波那契数列有密切的关系。

例 3.（树的分枝）如果一棵树每年都在生长，第二年有两个分枝，通常第三年就有三个分枝，第四年五个，第五年八个，……，每年的分枝数都是斐波那契数。

例 4.（杨辉三角形与斐波那契数列）把杨辉三角形中的数据排列在表格中，自左下至右上斜线相加，就可以得到斐波那契数列，如表 23-1 所示。

表 23-1　杨辉三角形与斐波那契数列

	1	1	2	3	5	8	13	21
1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	

实验 3　取一整数 m（如 m=51），将斐波那契数列模 m 得到一周期数列，将该周期数列的值作为音高，编程演奏它。

练习 3　取几组不同的 m，或将几段合并，感受旋律的变化。

练习 4　对斐波那契数列，设 $g_n=\frac{F_n}{F_{n+1}}$，请观察数列 $\{g_n\}$ 的变化趋势。

23.2　调和级数

熟知，高等数学中的 p-级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \tag{23-6}$$

当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散。特别地，当 $p=1$ 时，级数（23-6）称为调和级数。

一个令人感兴趣的问题是，调和级数发散到无穷的速度有多快？或者说数列

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

趋于无穷的速度有多快？

一个直观的方法仍然是画出由点$(n,S_n),n=1,2,\cdots,N$构成的折线图。

实验 4 取充分大的 N，观察调和级数的折线图。你觉得它发散的速度是快还是慢？将它的图形与$y=x$，$y=\sqrt{x}$ 以及 $y=\sqrt[4]{x}$ 作比较，谁的发散速度快？

解：取$n=30$，分别画出调和级数的折线图、与$y=x$，$y=\sqrt{x}$ 以及 $y=\sqrt[4]{x}$ 的比较图如图 23-3。

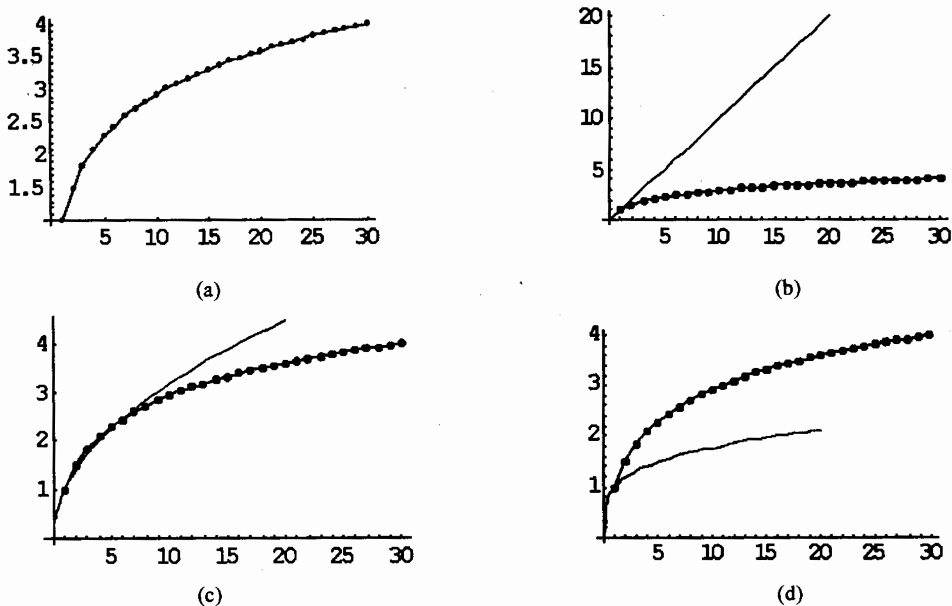


图 23-3 调和级数的折线图

(a)调和级数的折线图；(b)调和级数与 $y=x$ 的比较；

(c) 调和级数与 $y=\sqrt{x}$ 的比较；(d) 调和级数与 $y=\sqrt[4]{x}$ 的比较。

从以上实验结果可看出，调和级数发散的速度较慢。但是，它到底以什么样的速度发散到无穷？让我们再做下面的练习。

练习 5 对充分大的一系列 n，计算$S_{2n}-S_n$，你能否猜测出$S_{2n}-S_n$当n趋于无穷的极限？更一般地，$S_{2^k n}-S_n$趋于无穷的速度是什么？反过来，固定n，让k趋于无穷，$S_{2^k n}$趋于无穷的速度是什么？你能否由此得出S_n当n趋于无穷的极限阶？

感觉级数增长速度的一种方法是定义函数$J(n)$，它是不小于级数部分和

$$S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

的最小整数。例如 $J(1)=1,J(3)=2,J(4)=3$。

练习 6 对$n=1,2,\cdots,N$（N是某个较大整数），计算$J(2n)-J(n)$。你能作出什么猜测？对每个n，设$J(m)=J(n)+1$，则m/n的范围是什么？

练习 7 假定已知$J(n)$，你能估计$J(2n)$吗？特别地，$J(2n)>J(n)$成立吗？给定 n，你能找到N作为n的函数，它能保证$J(N)=J(n)+1$吗？

练习 8 对每个 $m=1,2,\cdots,30$，令 n 是使得 $J(n)=m$ 成立的最大整数，记为 $L(m)$。试计算比值 $L(m+1)/L(m)$。你能做出什么猜测？

23.3 自然对数的底 e

23.3.1 e 的由来

在高等数学中我们知道，数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是单调增加且有上界的数列，故存在极限，记其极限为 e，即

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{23-7}$$

称 e 为自然对数的底。可以证明，当 x 取实数而趋于无穷大时，函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的极限也存在并且也等于 e，因此

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \tag{23-8}$$

e 最早是由数学家欧拉（Euler）发现的，它始于对数函数的微分问题，设对数函数 $f(x)=\log_a x$，则其导函数为

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\log_a\left\{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\right\}^{\frac{1}{x}}\\&=\frac{1}{x}\log_a\mathrm{e}\end{aligned}$$

当 $a=\mathrm{e}$ 时，$f'(x)$ 变成了简单的式子 $\dfrac{1}{x}$，此时函数 $f(x)=\log_{\mathrm{e}}x$，记为 $\ln x$，称其为自然对数，这就是 e 被称为自然对数的底的含义所在。

实验 5 观察当 n 趋于无穷大时，数列 $a_n=\left(1+{}^1\!/_n\right)^n$ 和 $A_n=\left(1+{}^1\!/_n\right)^{n+1}$ 的变化趋势：

(1) 求出当 $n=10^m, m=1,2,\cdots,6$ 时 a_n,A_n 的值并观察变化趋势。

(2) 在同一坐标系中画出下面三个函数在区间 $[1,4]$ 上的图像：

$$y=\left(1+1/10^x\right)^{10^x}\ ,\quad y=\left(1+1/10^x\right)^{10^x+1}\ ,\quad y=\mathrm{e}$$

观察当 x 增大时图像的走向。

解：（1）计算出 a_n,A_n 的值如表 23-2，并画出其散点图如图 23-4。

表 23-2　a_n, A_n 的值

n	a_n	A_n
1	2.	4.
10	2.59374	2.85312
100	2.70481	2.73186
1000	2.71692	2.71964
10000	2.71815	2.71842
100000	2.71827	2.7183
1000000	2.71828	2.71828

(2) 画出三个函数在区间[1,4]上的图像如图 23-5。

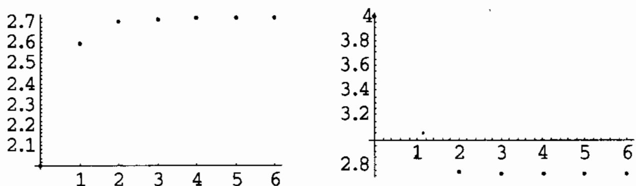


图 23-4　a_n（左）、A_n（右）的变化趋势

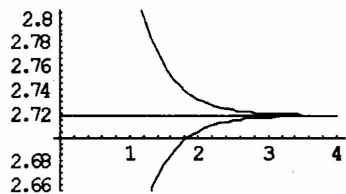


图 23-5　三个函数图像的比较

练习 9　将实验 5 中的作图区间换成[2,4]或[3,5]或[5,6]，观察所得到的图像。

通过观察可以看到，当 n 增大时 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 递增，$A_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 递减。随着 n 的无穷增大，a_n, A_n 无限接近，并趋于共同的极限 $\mathrm{e} = 2.718\ 28\cdots$。

23.3.2　用级数的部分和近似 e

将以 e 为底的指数函数 $y = \mathrm{e}^x$ 展开成幂级数，有

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} +, \cdots, + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

可以证明该级数的收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$。令 $x=1$，得

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \tag{23-9}$$

记

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

我们可以选择适当的 n，通过计算 S_n 得到 e 的近似值。

实验 6　利用（23-9）式计算 e 的近似值，精确到小数点后面 10 位，并与实验 5 的结果进行比较。

解：利用（23-9）式计算 e 的近似值如表 23-3。

表 23-3　e 的近似值

n	e 的近似值	误　差
5	2.71666667	0.00161516
6	2.71805556	0.00022627
7	2.71825397	0.00002786
8	2.71827877	3.0586177-6
9	2.71828153	3.0288585-7
10	2.71828180	2.7312661-8
11	2.71828183	2.2605523-9
12	2.71828183	1.7287667-10
13	2.71828183	1.2286233-11
14	2.71828183	8.154874-13
15	2.71828183	5.07711-14
16	2.71828183	2.9763-15
17	2.71828183	1.648-16
18	2.71828183	8.7-18
19	2.71828183	4.-19
20	2.71828183	0.-20

练习 10　（1）计算当 $x=10^{-n}, n=1,2,3,4,5,6,7$ 时，$\lambda(x)=\lg(1+x)/x$ 的值。并观察当 x 趋于 0 时 $\lambda(x)$ 是否接近于某一个极限值 λ。

λ 就是常用对数 $y=\lg x$ 在 x=1 处的导数，它不是一个简单的数。定义 $y=f(x)=\lambda^{-1}\lg x$，则 $f(x)$ 在 x=1 处的导数为 $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{f(1+\delta)-f(1)}{\delta}=1$。而 $f(x)=\lg x/\lg(10^{\lambda})=\log_a x$ 是以 $a=10^{\lambda}$ 为底的对数。

(2) 计算 $a=10^{\lambda}$。

(3) 计算当 $x=10^{-n}, n=1,2,3,4,5,6,7$ 时，$\mu(x)=\ln(1+x)/x$ 值，并观察当 x 趋于 0 时 $\mu(x)$ 是否趋于某一个极限值 μ？ μ 的值是多少？

23.3.3　积分与自然对数

对正实数 a，研究反比例函数 $y=f(x)=1/x$ 的图像与 x 轴及直线 $x=1, x=a$ 所围成的面积 $S(a)$，即定积分 $\int_1^a \frac{1}{x}\mathrm{d}x$。注意，我们定义直线 x=1 为计算面积的基准，从这条直线向右的面积为正，向左的面积为负。也即：当 a>1 时 $S(a)>0$；当 $0<a<1$ 时 $S(a)<0$；而当 $a=1$ 时 $S(a)=0$。

以 a=2 的情形为例。将自变量区间[1,2]平均分为 n 等份，每份长度为 $1/n$，插入的分点 $x_k=1+k/n$（1≤k≤n−1）。所求面积 $S(2)$ 相应地被分成 n 份，其中第 k 份是直线 $x=x_{k-1}, x=x_k$ 之间所夹的部分，其面积记为 S_k。S_k 的上边界是曲线 $y=1/x$ 在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的一段，最大高度

为$1/x_{k-1}=n/(n+k-1)$，最小高度为$1/x_k=n/(n+k)$。故$\frac{1}{n}\frac{n}{n+k-1}=\frac{n}{n+k-1}>S_k>\frac{1}{n}\frac{n}{n+k}=\frac{1}{n+k}$。于是，

$$\Sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}>S(2)>\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

Σ_n，σ_n分别称为“大和”、“小和”，而面积的准确值 S(2)在它们之间。当n递增时，Σ_n递减，σ_n递增，当$n\to\infty$时二者趋于共同的极限 S(2)。易见$\Sigma_n-\sigma_n=1/2n$，用Σ_n，σ_n来作 S(2)的近似值，误差小于 1/2n。而它们的平均值$(\Sigma_n+\sigma_n)/2$与 S(2)的误差则应当更小。事实上，这个平均值就是用梯形公式求出的 S(2)的近似值。

实验 7 对$n=10^m(m=3,4,5,6)$，计算“大和”Σ_n和“小和”σ_n及它们的平均值$(\Sigma_n+\sigma_n)/2$，观察它们的变化趋势。得出 S(2) 的近似值。再用求数值积分的语句 **NIntegrate[1/x,{x,1,2}]**，求 S (2)。

解：分别计算“大和”Σ_n和“小和”σ_n及它们的平均值$(\Sigma_n+\sigma_n)/2$，并与数值积分的结果比较，结果如表 23-4。

表 23-4 S(2)的计算结果

n	Σ_n		σ_n		$(\Sigma_n+\sigma_n)/2$	
	S(2)	误差	S(2)	误差	S(2)	误差
1000	0.783333	0.0901862	0.716667	−0.0764805	0.7	0.00695282
10000	0.759524	0.0663766	0.634524	−0.0586234	0.697024	0.00387663
100000	0.745635	0.0524877	0.645635	−0.0475123	0.695635	0.00248774
1000000	0.736544	0.0433968	0.653211	−0.0399365	0.694877	0.00173016
10000000	0.730134	0.0369866	0.658705	−0.034442	0.694419	0.00127229
100000000	0.725372	0.0322247	0.662872	−0.0302753	0.694122	0.00097467
1000000000	0.721695	0.0285482	0.66614	−0.0270074	0.693918	0.000770421
10000000000	0.718771	0.0256242	0.668771	−0.0243758	0.693771	0.000624223

练习 11 定义函数$S(x)=\int_1^x\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，并画出这个函数在区间[0.1,5]上的图像（也可以换成别的区间）。观察图像的形状，它像是什么函数？

练习 12 观察出练习 11 中画出的图像可能是对数函数的图像。现在来求这个对数的底b，它应满足条件 S(b)=1。从图像上看 b 比 3 稍微小一些。利用递推关系式

$$a_1=a-\frac{S(a)-1}{S'(a)}$$

由根的近似值 a 求出更好的近似值a_1。这里$S'(a)=1/a$。并在同一坐标系中作出函数$S(x)$和$\ln x$的图像。

当然，由不定积分的知识，很容易知道$S(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln x$。以上是通过数值和图像来验证这一结论。

23.4 欧拉（Euler）常数Υ

23.4.1 Υ的由来

设s_n为调和级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$的前$n$项和，即

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

记$a_n=s_n-\ln(n+1)$，可以证明数列$\{a_n\}$的极限存在。事实上，由定积分的知识，我们知道，

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\int_1^{n+1}\frac{1}{x}=\sum_{i=1}^{n}\int_i^{i+1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

当$x\in(i,i+1)$时，有$\frac{1}{i+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{i}$，故

$$0<\int_i^{i+1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x<\int_i^{i+1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$$

因此，$0<a_n<\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=1-\frac{1}{n}<1$。又

$$a_{n-1}-a_n=\int_{n+1}^{n+2}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x>0\text{，}\ (n=1,2,\cdots)$$

所以，序列$\{a_n\}$单调有界，于是$\lim_{n\to\infty}a_n$存在。

另外，我们还可以从几何图形上较直观地认识这一问题，如图23-6。位于曲线$y=\frac{1}{x}$上方从左到右前n个曲边三角形面积之和为a_n。由于这些三角形横的直角边长度都为1，竖的直角边长度之和不超过1，故可将它们全部平移到同一单位正方形内，因此它们的面积和不超过单位正方形的面积1。又因为每个小曲边三角形的面积是正的，故序列$\{a_n\}$是单调的。于是$\{a_n\}$单调有界，故$\lim_{n\to\infty}a_n$存在。

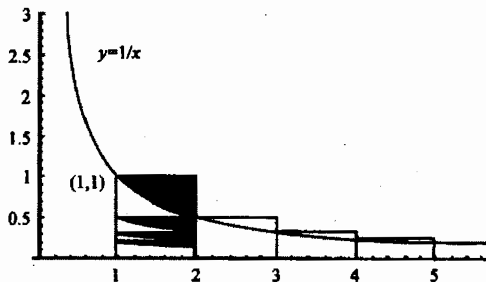


图23-6 欧拉（Euler）常数的几何意义

设$\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，即$\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}s_n-\ln(n+1)$，或

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)\right) \tag{23-10}$$

上式中的γ称为欧拉（Euler）常数。

实验 8 将坐标为$(n,H(n))$，$(n=1,2,\cdots,100)$的点依次连接成光滑曲线。与自然对数的曲线$y=\ln x(x\in[1,100])$画在同一个坐标系中。

解：画出$(n,H(n))$的散点图如图 23-7(a)。观察可知，当n很大时同一n的$H(n)$与$\ln n$之差接近于常数。计算出$\gamma=H(100)-\ln 100$，再画出函数$y=\ln x+\gamma$的图像，并比较$(n,H(n))$与$y=\ln x+\gamma$的图像，如图 23-7(b)。

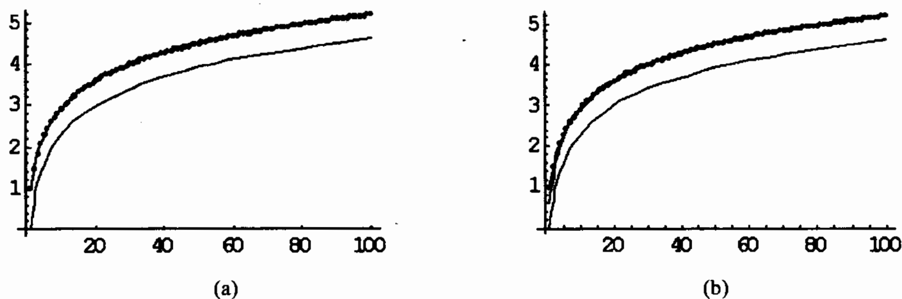


图 23-7 $(n,H(n))$与$y=\ln x+\gamma$的图形

练习 13 为了研究当n无穷增大时$C(n)=H(n)-\ln n$是否趋于一个常数，将坐标为$(n,H(n)-\ln n)$，$(1\leqslant n\leqslant 100)$的点依次连接成光滑曲线$c1$，再将坐标为$(n,H(n)-\ln(n+1))$，$(1\leqslant n\leqslant 100)$的点依次连接成光滑曲线$c2$。在同一坐标系中画出曲线$c2$，$c2$。观察$c1$递减和$c2$递增以及二者相互接近的现象。

计算$n=10^m(m=1,2,\cdots 6)$时$C(n)=H(n)-\ln n$和$c(n)=H(n)-\ln(n+1)$的值。观察$C(n)$递减、$c(n)$递增、二者趋于同一极限的现象。并求出这个极限γ。

显然

$$c(n)=H(n)-\ln(n+1)<C(n)=H(n)-\ln n$$

当$n\to\infty$时$C(n)-c(n)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$趋于 0，故$C(n),c(n)$趋于同一个极限$\gamma$。

实验 9 选取适当的n计算欧拉常数r的近似值。

解：利用(23-10)式，选取$n=1000$得到r的近似值与误差范围，其部分数值如表 23-5 所示。

表 23-5 γ的近似值

项数n	r的近似值	误差	项数n	r的近似值	误差
50	0.56783	0.02	500	0.576217	0.002
100	0.572257	0.01	750	0.57655	0.0013
200	0.574726	0.005	1000	0.576716	0.001

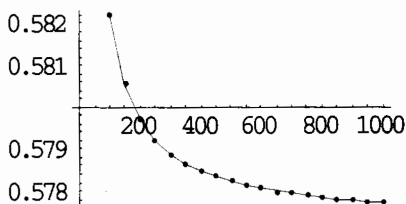


图 23-8　欧拉常数 r 的散点图

23.5　值得进一步研究的问题

问题 1　设 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n},a_1=1$，研究数列 a_n 的极限行为。

(1) 在平面上画出顺次连接点 $(n,a_n),n=1,2,\cdots,2000$ 的折线图。

(2) 根据上述图形，你认为数列 a_n 的极限是什么？

(3) 用一恰当的函数 $y=f(x)$ 去拟合上述图形。

(4) 猜测数列 a_n 的极限阶，并证明你的结论。

问题 2　研究数列 $a_n=\sin n$ 的极限状态的规律。

(1) 在平面上画出点列 $(n,a_n),n=1,2,\cdots,N$ （如 $N=5000$ ）。

(2) 根据上述图形，你认为数列 a_n 的极限是否存在？

(3) 你能从上述图形中观察到点列的分布有什么规律？能否证明所观察到的规律。

(4) 任取区间 $[a,b]\subset[-1,1]$ ，画出数列中落在区间 $[a,b]$ 中的点。将区间 $[a,b]$ 放大并取不同的 N，观察落在区间 $[a,b]$ 中的点集有何变化。

问题 3　考察由如下关系确定的正整数数列，

$$x_{n+1}=\begin{cases}3x_n+1, & \text{如果}x_n\text{为奇数}\\ \dfrac{x_n}{2}, & \text{如果}x_n\text{为偶数}\end{cases}$$

任取一正整数作为初值 x_0 ，计算数列 x_n ，并在平面坐标系中用折线连接 $(n,a_n),n=0,1,\cdots,N$ 。取不同的初值 x_0 ，观察所得的结果。你能发现数列 x_n 有什么规律吗？

问题 4　研究法里（Farey）数列的规律与项数。给定整数 n，将分母不超过 n 的所有真分数（以最简分数形式出现）从小到大排列，所得到的数列称为 n 阶法里（Farey）数列。例如，6 阶法里数列是 $\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}$ 。对 n 阶法里数列，我们要问它有多少项？相邻各项之间有何联系？为研究这些问题，请做以下实验。

(1) 任取一法里（Farey）数列，考察任意相邻三项之间的关系。将首尾两项的分子分母分别相加，所得分数是什么？你能因此做出什么样的猜想？你能否证明你的猜想？

(2) 考察法里数列相邻两项的差，你能得到什么结论？你能否证明你的结论？

(3) 将法里的每一项减去$\frac{1}{2}$，所得到的新数列有什么性质？

(4) 用a_n表示 n 阶法里数列F_n的项数。观察 n 阶法里数列和 $n+1$ 阶法里数列的关系。由此，a_n与a_{n+1}有何关系？

(5) 将点列$(n,a_n),n=0,1,\cdots,N$（如 N=1000）画在平面坐标系上。猜测a_n与 n 的关系。

问题 5 考察$a=2$时，级数（23-10）的一些结果。

(1) 对充分大的 N，计算级数的前 N 项和，并计算它与π^2的比值。你能否据此猜测级数（23-10）的和？

(2) 设$p_1=2,p_2=3,\cdots$是按顺序排列的素数。考察无穷乘积

$$\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n^2}\right)\cdots \tag{23-11}$$

试计算该无穷乘积的近似值。这个值与（23-2）中级数的和有何关系？由此，你能做出什么样的猜测？你能否证明你的猜测？

(3) 你能否猜测，对一般的 a>1，无穷级数（23-10）的和与哪个无穷乘积相等？

问题 6 研究下面的级数$6+\frac{6}{4}+\frac{6}{9}+\frac{6}{16}+\frac{6}{25}+\cdots$，你能得出什么结论？

问题 7 利用欧拉常数进一步研究练习 6、练习 7、练习 8 中的问题。

附 Mathematica 程序

1. 实验 1 的程序

```
f[n_] := f[n - 1] + f[n - 2]; f[0] = 1; f[1] = 1;fib = Table[f[i], {i, 1, 20}];
g1 = ListPlot[fib, PlotStyle -> PointSize[0.02]];
g2 = ListPiot[fib, PlotJoined -> True];Show[g1, g2];
```

2. 实验 2 的程序

```
f[n_] := f[n - 1] + f[n - 2]; f[0] = 1; f[1] = 1;fib = Table[f[i], {i, 1, 20}];lgf = Log[fib];
g1 = ListPlot[lgf, PlotStyle -> PointSize[0.02]];
g2 = ListPlot[lgf, PlotJoined -> True];Show[g1, g2];
```

3. 实验 3 的程序

```
fibplay[n_Integer] := Module[{t = {}, i},
    For[i = 1, i <= n, i++, AppendTo[t, Mod[斐波那契[i], n]]];
    ListPlay[t, PlayRange -> {0, n}, SampleRate -> 5]]
```

4. 实验 4 的程序

```
Clear[n]; s[n_] := NSum[1/i, {i, n}]; n = 30;sn = Table[s[i], {i, 1, n}];
g1 = ListPlot[sn, PlotStyle -> PointSize[0.02], DisplayFunction -> Identity];
g2 = ListPlot[sn, PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity];
g3 = Show[g1, g2, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
f1[x_] := x; f2[x_] := Sqrt[x]; f3[x_] := x^(1/4);
```

```
gf1 = Plot[f1[x], {x, 0, 20}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0],
        DisplayFunction -> Identity];
gf2 = Plot[f2[x], {x, 0, 20}, PlotStyle -> RGBColor[0, 1, 0],
        DisplayFunction -> Identity];
gf3 = Plot[f3[x], {x, 0, 20}, PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1],
        DisplayFunction -> Identity];
Show[g3, gf1, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
Show[g3, gf2, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
Show[g3, gf3, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

5. 实验 5 的程序

```
Clear[a, A, n, t1, t2, t, k]; m = 5; a[n_] = (1 + 1/n)^n; A[n_] = (1 + 1/n)^(n + 1);
t = Table[{k, 10^k, N[a[10^k]], N[A[10^k]]}, {k, 0, m}];
t1 = Table[{k, N[a[10^k]]}, {k, 0, m}];t2 = Table[{k, N[A[10^k]]}, {k, 0, m}];
TableForm[t, TableHeadings -> {None, {"m", "n=10^m", "a[n]", "A[n]"}}]
ListPlot[t1, PlotStyle -> PointSize[0.02]];ListPlot[t2, PlotStyle -> PointSize[0.02]];
y1[x_] = (1 + 1/10^x)^(10^x); y2[x_] = (1 + 1/10^x)^(10^x + 1); y = E;
Plot[{y, y1[x], y2[x]}, {x, 0, 4},
     PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}];
```

6. 实验 6 的程序

```
s[n_] := 1 + N[Sum[1/k!, {k, 1, n}], 20];
t = Table[{i, N[s[i], 20], N[Abs[E - s[i]], 20]}, {i, 5, 20}];
TableForm[t, TableHeadings -> {None, {"n", "s[n]", Error}}]
```

7. 实验 7 的程序

```
m = 10; ssum[n_] := NSum[1/(n + k - 1), {k, 1, n}];
lsum[n_] := NSum[1/(n + k), {k, 1, n}];app = NIntegrate[1/x, {x, 1, 2}];
t = Table[{10^k, N[ssum[k], 20], N[lsum[k], 20],
          N[(ssum[k] + lsum[k])/2, 20]}, {k, 3, m, 1}];
t1 = Table[{10^k, N[ssum[k], 20], N[ssum[k] - app, 20]}, {k, 3, m, 1}];
t2 = Table[{10^k, N[lsum[k], 20], N[lsum[k] - app, 20]}, {k, 3, m, 1}]; t3 =
   Table[{10^k, N[(ssum[k] + lsum[k])/2, 20],
         N[(ssum[k] + lsum[k])/2 - app, 20]}, {k, 3, m, 1}];
TableForm[t, TableHeadings -> {None, {"n", "ssum", "lsum", "approximation"}}]
TableForm[t1, TableHeadings -> {None, {"n", "ssum", "error"}}]
TableForm[t2, TableHeadings -> {None, {"n", "lsum", "error"}}]
TableForm[t3, TableHeadings -> {None, {"n", "approximation", "error"}}]
```

8. 实验 8 的程序

```
H[n_] := NSum[1/k, {k, 1, n}];t = Table[{n, H[n]}, {n, 1, 100}];
p1 = ListPlot[t, PlotStyle -> PointSize[0.015], DisplayFunction -> Identity];
p2 = ListPlot[t, PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity];
pic1 = Show[p1, p2, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

```
pic2 = Plot[Log[x], {x, 1, 100}, PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1],
        DisplayFunction -> Identity];
Show[pic1, pic2, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
t1 = Table[{n, H[n], N[Log[n]], N[Abs[Log[n] - H[n]]]}, {n, 1, 101, 10}];
TableForm[t1, TableHeadings -> {None, {"n", "H[n]", "Log[n]", Error}}]
c = H[100] - Log[100]
pic3 = Plot[Log[x] + c, {x, 1, 100}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0],
        DisplayFunction -> Identity];
Show[pic1, pic2, pic3, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

9. 实验 9 的程序

```
Clear[c, n]; H[n_] := N[Sum[1/k, {k, 1, n}], 20]; c[n_] := H[n] - Log[n];
t = Table[{n, N[c[n], 20]}, {n, 100, 1000, 50}];
TableForm[t, TableHeadings -> {None, {"n", "c[n]"}}]
p1 = ListPlot[t, PlotStyle -> PointSize[0.02], DisplayFunction -> Identity];
p2 = ListPlot[t, PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity];
Show[p1, p2, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
    c[10000]
```

实验二十四　非线性方程近似解

很多科学计算问题都遇到非线性方程的求解问题。设非线性方程

$$f(x)=0 \tag{24-1}$$

方程（24-1）的解 x^* 称为方程的根式函数 $f(x)$ 的零点，若 $f(x)$ 可表示为

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x)$$

其中 m 为大于 1 的整数，且 $g(x^*)\neq 0$，称为 x^* 为方程（24-1）的 m 重根，或函数 $f(x)$ 的 m 重零点。若 $f(x)$为 n 次多项式，则称 $f(x)=0$ 为 n 次代数方程；若 $f(x)$为超越函数，则称 $f(x)=0$ 为超越方程。从理论上可以证明，5 次以上代数方程没有一般的公式解法，3 次、4 次代数方程虽然有解的公式，但应用起来十分繁琐。对于一般的超越方程，更无求根公式。因此，研究非线性方程的数值解法是很必要的。

本实验主要介绍几种求近似根的常用方法。

24.1　根的隔离与二分法

方程求根问题一般分两步进行。第一步根的隔离：确定根所在的区间[a, b]，使在[a, b]内只有方程的一个根，这个步骤叫根的隔离，这样的区间叫隔根区间。第二步近似根的精确化：已知根的一个近似值后，用某种方法对其进行加工，使之满足给定的精度要求。

24.1.1　求隔根区间的一般方法

由高等数学可知，若 $f(x)$ 在[a, b]上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则 $f(x)=0$ 在[a, b]内必有根，若 $f(x)$ 在[a, b]上严格单调，则 $f(x)=0$ 在[a, b]内只有一个根。据此可得求隔根区间的两种方法。

1. 作图法

画出 $y=f(x)$的草图，由 $f(x)$与横轴交点的大概位置来确定隔根区间，或者利用导函数 $f'(x)$ 的正、负与函数 $f(x)$的单调性的关系确定根的大概位置。若 $f(x)$比较复杂，还可将方程（24-1）化为一个等价方程 $\varphi(x)=\psi(x)$，则曲线 $y=\varphi(x)$ 与 $y=\psi(x)$ 之交点 $A(x^*,y^*)$ 的横坐标 x^* 即为原方程之根，据此也可通过作图求得 x^* 的隔根区间。

2. 逐步搜索法

从区间[a, b]的左端点 a 出发，按选定的步长 h 一步步向右搜索，若

$$f(a+jh)\cdot f(a+(j+1)h)<0 \qquad (j=0,1,2,\cdots)$$

则区间 $[a+jh,a+(j+1)h]$ 内必有根。搜索过程也可从 b 开始，这时应取步长 $h<0$。

24.1.2　二分法

在方程求近似根的方法中，最直观、最简单的方法就是二分法，在实验三中我们已经接触

过，下面再作系统的介绍。

设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续严格单调，且$f(a)\cdot f(b)<0$。为了确定起见，不妨设$f(a)<0$，$f(b)>0$，则方程$f(x)$在$[a,b]$区间内一定只有一个根。二分法的基本思想是：用对分区间的方法，通过判别函数$f(x)$的符号，逐步将有根区间缩小，使在足够小的区间内，方程有且仅有一个根。具体步骤是：

用区间中点$\frac{1}{2}(a+b)$平分$[a,b]$为两个区间，计算中点的函数值$f(\frac{a+b}{2})$，根据$f(\frac{a+b}{2})$的值，分两种情况：

(1) $\left| f(\frac{a+b}{2}) \right| < \eta$（$\eta$是预先给定的精度），则$\frac{a+b}{2}$就是所求的近似根，计算停止。

(2) $\left| f(\frac{a+b}{2}) \right| \geqslant \eta$，由$f(\frac{a+b}{2})$的符号形成新的有根区间$[a_1,b_1]$。

当$f(\frac{a+b}{2})<0$时，取$a_1=\frac{a+b}{2}, b_1=b$；当$f(\frac{a+b}{2})>0$时，取$a_1=a, b_1=\frac{a+b}{2}$，这时有$[a,b]\supset[a_1,b_1]$且$b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$。

对此新的有根区间$[a_1,b_1]$又可采用同一步骤，仅当出现第一种情况时，计算停止。

这样，得到一系列有根区间

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_k,b_k]$$

其中每一个区间都是前一个区间长度的一半，最后一个区间的长度为

$$b_k-a_k=\frac{1}{2^k}(b-a) \tag{24-2}$$

显然有$f(a_k)\cdot f(b_k)<0$。当$k\to\infty$时，$\frac{1}{2^k}(b-a)\to 0$。如取最后一个区间的中点x_k作为$f(x)=0$根的近似值，则

$$x_k=\frac{1}{2}(a_k+b_k) \tag{24-3}$$

且有误差估计式：

$$\left|x_k-x^*\right|\leqslant\frac{1}{2^{k+1}}(b-a)<\varepsilon \tag{24-4}$$

实验 1 用二分法求方程$f(x)=x^3-x-1=0$的实根，要求误差不超过 0.005。

解：由于$f(1)=-1<0, f(\frac{3}{2})=\frac{9}{8}>0$，且$f'(x)=3x^2-1$在[1,1.5]上恒大于 0，所以方程在此区间内仅有一个根。由误差估计式（24-4），即

$$\left|x_k-x^*\right|\leqslant\frac{1}{2^{k+1}}(1.5-1)=\frac{1}{2^{k+2}}\leqslant 0.005$$

由此解得$n\geqslant\frac{2}{\lg 2}-1\approx 5.6$，取 n=6，按二分法计算的过程见表 24-1，$x_6=1.3242$为所求

之近似根。

表 24-1　二分法计算过程

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	备　注
0	1.0	1.5	1.25	-	1. $f(a_0)<0, f(b_0)>0$ 2. 根据精度要求，x_n 取到小数点后四位即可
1	1.25	1.5	1.375	+	
2	1.25	1.375	1.3125	-	
3	1.3125	1.375	1.3438	+	
4	1.3125	1.3438	1.3281	+	
5	1.3125	1.3281	1.3203	-	
6	1.3203	1.3281	1.3242	-	

二分法的优点是计算简单、方法可靠，只要求$f(x)$连续。因此对函数性质要求较低。它的缺点是不能求偶数重根，也不能求复根，收敛速度与以$\frac{1}{2}$为比值的等比级数相同，不算太快。因此，一般在求方程近似的根时，不大单独使用，常用来为其它方法求方程近似根时提供初值。

练习 1　用二分法求方程$f(x)=x^3-x^2-2x+1=0$,在区间$[0,1]$内的一个实根，要求有三位有效数字。

24.2 迭 代 法

迭代法是一类典型方法，不仅用于方程求根，而且在方程组求解、矩阵求特征值等方面都需要使用。

迭代法的基本思想是一种逐次逼近的方法，首先给定一个粗糙的初始值，然后用同一个迭代公式，反复修正这个初值，直到满足预先给定的精度要求为止。

24.2.1　简单迭代法

设有方程$f(x)=0$，将它改写成等价形式$x=\varphi(x)$，并作出

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\quad k=0,1,2,\cdots \tag{24-5}$$

在根的邻近任取初始值x_0，由公式（24-5）可算得x_1，继而又算出x_2等等，我们将式（24-5）称为迭代公式，$\{x_k\}$称为迭代序列，$\varphi(x)$称为迭代函数。若$\varphi(x)$是连续的，且$\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=x^*$。对公式（24-5）两端同时取极限，则得

$$\lim_{k\to+\infty}x_{k+1}=\lim_{k\to+\infty}\varphi(x_k)=\varphi(\lim_{k\to+\infty}x_k)$$

即

$$x^*=\varphi(x^*) \tag{24-6}$$

这表明x^*是原方程的根，当迭代序列$\{x_k\}$有极限时，我们称此序列为收敛的，或称迭代公式（24-5）收敛。由于在实际计算时，不可能作无限次迭代运算，所以迭代到一定程度，就取x_{k+1}作为原方程根的近似值。这种求方程近似根的方法称为迭代法。

我们也可将迭代函数$\varphi(x)$视为一种变换，式（24-5）表示了它将点x_k变换成点x_{k+1}，式（24-6）则表示为将点x^*仍然变换到它的自身。因此，人们也常将方程$x=\varphi(x)$的根x^*称为变

换$\varphi(x)$下的不动点。

迭代法具有明确的几何意义：求方程$x=\varphi(x)$的根，也即求$\varphi(x)$的不动点，在几何上是求直线$y=x$与曲线$y=\varphi(x)$交点的横坐标x^*，如图 24-1 所示。从点$p_0(x_0,\varphi(x_0))$出发引平行于x轴的直线交直线$y=x$于一点，过该点再作平行于y轴的直线，它与曲线$y=\varphi(x)$相交于点p_1，显见点p_1的横坐标为$x_1=\varphi(x_1)$，这样继续做下去，在曲线$y=\varphi(x)$上得到一系列的点$p_1,p_2,\ldots$，其横坐标分别等于按公式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$求得的近似值$x_1,x_2,\cdots$，图 24-1（a），$\{x_k\}$逐步逼近于$\varphi(x)$的不动点x^*；图 24-1（b），$\{x_k\}$不收敛。

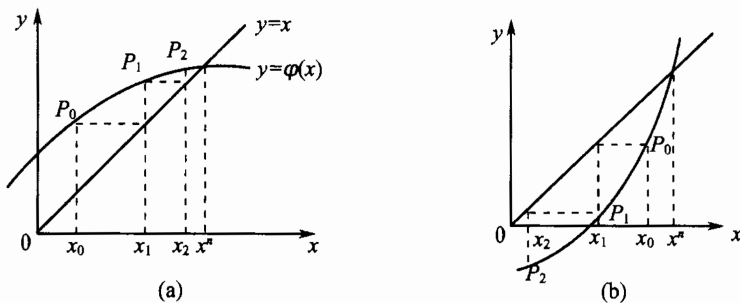


图 24-1　迭代法的几何意义

实验 2　用迭代法求方程$x^4+2x^2-x-3=0$在区间[1,1.2]内的实根。

解：对方程进行如下三种变形：

$$x=\varphi_1(x)=(3+x-2x^2)^{\frac{1}{4}}$$

$$x=\varphi_2(x)=\sqrt{\sqrt{x+4}-1}$$

$$x=\varphi_3(x)=x^4+2x^2-3$$

分别按以上三种形式建立迭代格式，并取$x_0=1$进行迭代计算，结果如下：

$$x_{k+1}=\varphi_1(x_k),\quad x_{26}=x_{27}=1.124123$$

$$x_{k+1}=\varphi_2(x_k),\quad x_6=x_7=1.124123$$

$$x_{k+1}=\varphi_3(x_k),\quad x_3=96,x_4=8.495307\times10^7$$

准确根$x^*=1.124123029$，可见迭代格式不同，收敛情况也不同。第二种格式比第一种格式收敛快得多，而第三种格式不收敛。

练习 2　用迭代法求方程$x^2-2x-3=0$在区间[2,4]内的实根。

由实验 2 知，使用迭代法必须解决两个问题：一是迭代格式应该满足什么条件才能保证收敛；二是如何判别迭代收敛的速度，建立收敛快的迭代格式。

24.2.2　收敛条件与误差估计

下面不加证明地引入以下的收敛条件。

定理 1 设$\varphi'(x)$在$[a, b]$上存在，且满足条件：

(1) 当$x \in [a,b]$时，$\varphi(x) \in [a,b]$。

(2) 存在正数$L<1$，使对任意的$x \in [a,b]$，$|\varphi'(x)| \leqslant L<1$。

则(1)方程$x=\varphi(x)$在$[a,b]$上有唯一根x^*。

(2) 对任意迭代初值$x_0 \in [a,b]$，迭代序列$x_{k+1}=\varphi(x_k),(k=0,1,2\cdots)$收敛于$x^*$。

此定理在理论上十分重要，但是条件(1)却不容易判别。如果仅在根的邻域中考察迭代格式，则下述定理可避免条件(1)的判别。

定理 2 若在方程$x=\varphi(x)$之根x^*的某邻域$R=\{x||x-x^*|<\delta\}$内$\varphi'(x)$存在，且存在正常数$L<1$，使

$$|\varphi'(x)| \leqslant l<1, \quad \forall x \in R \tag{24-7}$$

则任取$x_0 \in R$，迭代格式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$均收敛于x^*，且有下列误差估计式：

$$|x^*-x_k| \leqslant \frac{L}{1-L}|x_k-x_{k+1}| \tag{24-8}$$

$$|x^*-x_k| \leqslant \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \tag{24-9}$$

反之，若在根x^*的邻域R内有：

$$|\varphi'(x)| \geqslant 1 \tag{24-10}$$

则迭代必发散。

本定理给出了迭代格式在根x^*邻近是否收敛的判定条件。从图 24-2 中可以直观地看到条件式（24-7）、（24-10）对收敛性的影响。此外，定理中十分强调，当条件式（24-7）成立时，迭代初值x_0应取在根x^*的邻域R中，如果对任意给定的x_0，迭代格式均收敛，则称此格式具有全局收敛性，但这样的格式是极其稀少的。如果对根x^*的某邻域内的任一点x_0，迭代格式均收敛，则称此格式具有局部收敛性。本定理给出的就是局部收敛条件。

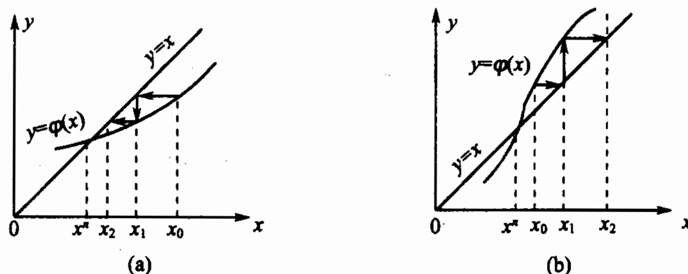


图 24-2 迭代法的收敛条件

(a) $|\varphi'(x)| \leqslant L<1$；(b) $|\varphi'(x)|>1$

定理 中给出的两个误差估计式（24-8）、（24-9）是很有意义的，由式（24-9）可知，条件式（24-7）中的L越小，迭代过程收敛越快，若$L<1$，但$L \approx 1$，则收敛很慢，此种格式不宜采用。

由式（24-8）可知，若$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$，则近似解$x_k$有如下误差估计

$$|x^* - x_k| \leqslant \frac{L}{1-L}\varepsilon$$

因此，在正常收敛情况下，即L不十分接近于1时，可用$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$控制迭代结束。这种用前后两次迭代结果估计误差的方法称为事后误差估计。实际应用中，控制迭代结束的条件也常取为$E < \varepsilon$。其中：

$$E = \begin{cases} |x_k - x_{k-1}|, & \text{当}|x_k| \leqslant 1 \\ \dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|}, & \text{当}|x_k| > 1 \end{cases}$$

24.2.3 迭代过程的收敛速度

在建立一般迭代公式时，为了能科学地刻画迭代收敛的快慢，应考察迭代误差下降的速度。令$\mathrm{e}_k = x_k - x^*$，若

$$\frac{\mathrm{e}_{k+1}}{\mathrm{e}_k^p} \to c \quad (k \to \infty, \text{常数}c \neq 0)$$

则称迭代格式$x_{k+1} = \varphi(x_k)$是p阶收敛的。特别地，p=1时称为线性收敛，p=2时称为平方收敛。p>1时称为超线性收敛。显然，收敛阶p越大，收敛越快。于是有，

定理3 设x^*为$x = \varphi(x_k)$之根，在x^*的邻域内$\varphi(x)$有连续的p阶导数（p≥1），那么，

(1) 若$0 < |\varphi'(x^*)| < 1$，则迭代过程在x^*的邻近为线性收敛；

(2) 若$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0, \varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$，则迭代过程在$x^*$的邻近为$p$阶收敛。

24.2.4 迭代公式的加速

对于方程

$$x = \varphi(x) \tag{24-11}$$

假定$\varphi'(x)$在根x^*的邻近改变不大，其估计值为l，且$|l| < 1$。今将方程(24-11)两边同加上λx(其中λ为待定常数，且$\lambda \neq -1$)，再除以$1+\lambda$，可化得方程(24-11)的同解方程，

$$x = \phi\ (x) \tag{24-12}$$

其中$\phi(x) = \dfrac{1}{1+\lambda}[\varphi(x) + \lambda x]$。根据上面关于迭代法收敛性的讨论，如果$|\phi'(x)|$在根$x^*$的邻近比$|L|$还要小，那么由同解方程(24-12)定出的迭代公式就会比方程(24-11)定出的要收敛得快。由此，我们只要从

$$|\phi'(x)| = \left|\frac{1}{1+\lambda}[\varphi'(x) + \lambda]\right| < |L| \tag{24-13}$$

中定出λ即可。

实际上，当我们选取$\lambda = -L$时，它显然可以使$|\phi'(x)|$相当接近于零，从而使式（24-13）成立。将$\lambda = -L$代入方程（24-12）后，由此即可得在x^*邻近的迭代加速公式为：

$$x_{k+1} = \frac{1}{1-L}[\varphi(x_k) - Lx_k],\ k = 0,1,2,\cdots \tag{24-14}$$

实验 3 求方程 $x = \mathrm{e}^{-x}$ 在 $x = 0.5$ 邻近的一个根。

解：在 $x = 0.5$ 邻近，$\varphi'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ 近似等于-0.6，故它的迭代加速公式是

$$x_{k+1} = \frac{1}{1.6}(\mathrm{e}^{-x_k} + 0.6x_k)$$

运用这个迭代加速公式的计算结果如表 24-2。

表 24-2　迭代加速公式的计算结果

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$
0	0.5	
1	0.56658	0.06658
2	0.56713	0.00055
3	0.56714	0.00001

练习 3 试验 $f(x) = \cos x$，画出 $y = x$ 和 $y = \cos x$ 的草图。它们相交吗？如果相交，相交处 x 的值就是 $\cos x = x$ 的一个解，选择某些初始值 x_0，并迭代 f 观察它。

练习 4 关于 $f(x) = \sin x$ 如何？画 $y = x$ 和 $y = \sin x$ 的草图，你正在找哪个解？如果这时你进行迭代将发生什么？如果 $f(x) = \sin 2x$ 又如何？

练习 5 找出用迭代法可能找出的方程 $x^3 - 2x + 1 = 0$ 尽可能多的解，解释对每个求解过程迭代成功或失败的原因。

练习 6 如果 a 是一个正常数(如 $a = 2$)，你可以用迭代函数 $f(x) = x^2 + x - a$ 求解方程 $g(x) = x^2 - a = 0$ 试一下。

练习 7 指出函数 $f(x) = (x + \frac{a}{x})/2$ 的不动点是方程 $x^2 - a = 0$ 的解，用迭代法确定它的不动点行吗？

练习 8 试用 $f(x) = 2\cos x$，画出草图并确定 $2\cos x = x$ 的解，迭代时将发生什么？

练习 9 求解 $2\cos x = x$ 时，你还可以选择 $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2\cos x)$。这个选择更加有效吗？

练习 10 找出一个 λ，使得无论取什么初始值迭代都将收敛到 $f(x) = 2x - 1$ 的不动点。指出有一个 λ 的最佳选择，它给出最快的收敛性。

练习 11 对于有多个不动点的非线性函数，好的 λ 的选择在不动点与不动点之间是变化的，对于练习 5 中的情形，对以前迭代失败的每个不动点找到好的 λ 值。

练习 12 利用改进的迭代公式求解方程 $g(x) = x^2 - 3 = 0$，即此时 $f(x) = x^2 + x - 3$ 这个迭代过程的收敛性如何？迭代得到的解如何依赖于初值 x_0 的选择？

24.3 牛顿迭代法

对于给定的方程 $f(x) = 0$，如何构造迭代格式具有很大的灵活性。首先要把它写成容易迭

代的等价形式 $x=\varphi(x)$。迭代函数 $\varphi(x)$ 构造得好坏，不仅影响收敛速度，而且有可能使迭代序列发散。怎样选择一个迭代函数，才能确保迭代序列一定收敛呢？

24.3.1 牛顿法

构造迭代函数的一条重要途径是用近似方程来代替原方程去求根。因此，非线性方程 $f(x)=0$ 如果能用线性方程来近似地代替，那么求近似根问题就很容易解决，而且十分方便。牛顿法就是把非线性方程线性化的一种方法。

设 x_k 是方程 $f(x)=0$ 的一个近似根，将 $f(x)$ 在 x_k 处作泰勒展开

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2!}(x-x_k)^2 \tag{24-15}$$

式中 ξ_k 介于 x 与 x_k 之间。若取式（24-15）的前两项来近似代替 $f(x)$，并称此为 $f(x)$ 的线性化，则可得近似的线性方程

$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

设 $f'(x_k)\neq 0$，我们取此近似方程的根作为方程 $f(x)=0$ 新的近似根，并记它为 x_{k+1}。从而得到，

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{24-16}$$

式（24-16）称为求 $f(x)=0$ 根的牛顿迭代公式。现在来考察牛顿法是否收敛。

由式（24-16）可知，牛顿法的迭代函数是

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\\ \varphi'(x)&=1-\frac{[f'(x)]^2-f''(x)\cdot f(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f''(x)\cdot f(x)}{[f'(x)]^2}\end{aligned} \tag{24-17}$$

若 $f'(x^*)\neq 0$，而 $f(x^*)=0$，则在根 x^* 附近 $\varphi'(x^*)$ 接近于 0，因此迭代格式是局部收敛的，而且牛顿法在根的附近收敛很快。又由于是局部收敛，因而只能在根的附近选择初始值。

牛顿法具有明显的几何意义，方程

$$y=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

是曲线在点 $(x_k,f(x_k))$ 处的切线，迭代格式（24-16）就是切线与 x 轴交点的横坐标，所以牛顿法就是用切线与 x 轴交点的坐标近似代替曲线与 x 轴交点的坐标，如图 24-3 所示。因此，牛顿法也称切线法。

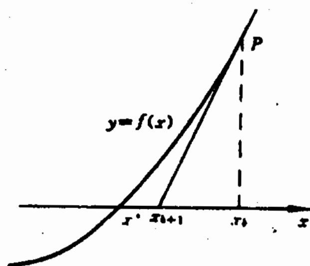


图 24-3 牛顿法的几何意义

如果迭代过程中出现 $f'(x_k)\approx 0$，或者迭代次数超过某一上界 M，仍达不到要求精度，则认为计算失败。

用牛顿法求方程 $x-\sin x=0.5$ 的根，使其精确到 0.0001。

解：设函数 $f(x)=x-\sin x-0.5$，$f(1)=-0.34<0, f(2)=0.591>0$。所以方程在区间(1,2)之间有一根。又因为 $f'(x)=1-\cos x$，故迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-\sin x_k-0.5}{1-\cos x_k}$$

取 $x_0=2$，计算结果列于表 24-3。

用牛顿法求平方根 $\sqrt{c}(c>0)$ 的迭代格式，并计算 $\sqrt{135.607}$，使其精确到小数点后 5 位。

解：设 $f(x)=x^2-c$，则 $f(x)=0$ 的根就是 $\sqrt{c}(c>0)$。由式(24-16)迭代格式为，

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-c}{2x_k}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{c}{x_k})$$

可以证明，这个迭代格式对任意初值 $x_0>0$ 都是收敛的。利用上式，取 $x_0=12$，计算结果如表 24-4。

表 24-3　牛顿法的解

k	x_k
0	2
1	1.5829
2	1.5009
3	1.4973
4	1.4973

表 24-4　牛顿法求平方根

k	x_k
0	12
1	11.65029167
2	11.6450430
3	11.64504135

练习 13　用牛顿法求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在 $x_0=1.3$ 附近的一个根，并说明如何更有效地使用牛顿法。

24.3.2　简化牛顿法

牛顿法的最大优点是收敛速度快，其基本思想也可以推广到各类非线性方程组，但其缺点是每迭代一次要计算一次导数值 $f'(x_k)$ 中，这对 $f(x)$ 表达式复杂或无明显表达式的问题造成了困难，计算 $f'(x_k)$ 的工作量就可能很大。有时为了避免计算导数值，我们常常用一个给定的常数值 c 来代替导数值，这时的迭代公式就成为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{c} \tag{24-18}$$

此式称为简化牛顿迭代公式，只要 c 选择得当，式（24-18）总是收敛的，不过其收敛速度降为线性。其几何意义可描述为，用平行线代替牛顿法中的切线，如图 24-4 所示。

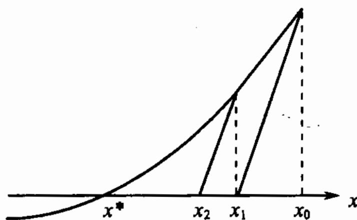


图 24-4　简化牛顿法的几何意义

但 c 值应如何选择，使得式（24-18）总是收敛的？可以从迭代函数及收敛条件来确定，因为 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{c}$ 及 $\varphi'(x)=1-\dfrac{f'(x)}{c}$，如果 $|\varphi'(x)|=|1-\dfrac{f'(x)}{c}|<1$ 即

$$0<\frac{f'(x)}{c}<2 \tag{24-19}$$

迭代公式（24-18）收敛，这时只要取 c 与 $f'(x)$ 同号，且满足（24-19）式即可。这样的 c 值比较容易得到，确定一个 c 值后，代入（24-18）式，即可用迭代公式计算，这样每迭代一次，只要求一次 $f(x)$ 的值。显然计算的工作量要比牛顿法小得多。

实验 6　用简化牛顿法求 $x-\sin x-0.5=0$ 的根。

解：因为 x^* 在 1.5 附近，$f'(1.5)=1-\cos 1.5\approx 0.9$。取 $c=0.9$ 可得迭代公式，

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-\sin x_k-0.5}{0.9}$$

取 $x_0=2$ 计算结果见表 24-5。

表 24-5　简化牛顿法

k	0	1	2	3	4	5
x_k	2	1.34366	1.48883	1.49751	1.49729	1.49730

比较实验 4 与实验 6 的计算结果，为达到同一精度，牛顿法迭代 4 次而简化牛顿法需要迭代 5 次，收敛速度比牛顿法慢些。

练习 14　试选取不同的 c 值求方程 $f(x)=1-x-\sin x=0$ 的根，说明 c 值对收敛速度的影响。

24.3.3　割线法

简化牛顿法是用一个常数代替牛顿公式中的导数值，但没有充分利用 $f(x)$ 本身的特性，因此收敛较慢。若在牛顿迭代公式中改用差商 $\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$ 代替导数 $f'(x_k)$，得迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1}) \tag{24-20}$$

可以证明，它的收敛阶为 $p=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\approx 1.618$，确实比式（24-18）收敛快，计算公式(24-20)称为割线法公式。如图 24-5，它的几何意义是：连接曲线 $y=f(x)$ 上的两点 $p_k(x_k,f(x_k))$ 与

$p_{k-1}(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$，所得弦线与 x 轴交点的横坐标即为由此式求出的 x_{k+1}。它与前面迭代格式的区别在于计算时，需要提供二个初值 x_0 和 x_1。

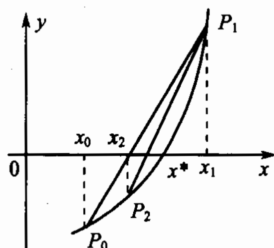


图 24-5 割线法的几何意义

用割线法求方程 $x-\sin x-0.5=0$ 在 $x=1.5$ 附近的一个根。

解：取 $x_0=1.4, x_1=1.6$ 进行迭代，并有迭代格式，

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-\sin x_k-0.5}{(x_k-x_{k-1})-(\sin x_k-\sin x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$$

计算结果见表 24-6。

表 24-6 割线法

k	0	1	2	3	4
x_k	1.4	1.6	1.49194	1.49702	1.49730

实验结果表明，割线法的收敛速度还是很快的。进一步地分析可知它的局部收敛速度比牛顿法略为慢些，但是它避免了求导数，而且每迭代一次，只要求一次 $f(x)$ 的值，计算工作量比牛顿法少。

24.4 计算重根的牛顿迭代法

如前所述，若 x^* 是 $f(x)=0$ 的 m 重根 $(m\geqslant 2)$，则 $f(x)$ 可表示为

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x)$$

其中 $g(x^*)\neq 0$，此时用牛顿迭代法求 x^* 仍然收敛，只是收敛速度将大大减慢。

求函数 $f(x)=x^4-8.6x^3-35.51x^2+464.4x-998.46$ 在区间[2,10]上的根。

解：作函数 $y=f(x)$ 在[2,10]上的图形如图 24-6。从图形上可看出，在 $x=4$ 附近可能有一重根。在区间[7,8]处有一单根。首先用牛顿法求 x=7 附近的单根。

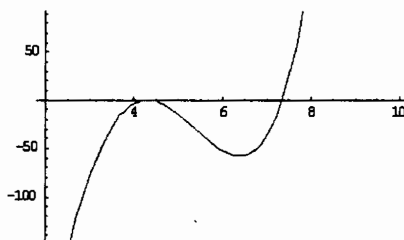


图 24-6 $y=f(x)$ 的图形

取初值 $x_0=7$，由 $f'(x)=4x^3-25.8x^2-71.02x+464.4$，应用牛顿法，其迭代公式为 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ $(k=0,1,\cdots)$，计算结果见表 24-7。

可知迭代 5 次，该 6 位数均为有效数字，收敛速度是很快的。同样，用牛顿法求区间[4,5]内的根，取 $x_0=4$，计算结果见表 24-8。

表 24-7　牛顿法求单根

k	x_k	$\delta_k=x_k-x_{k-1}$
1	7.485612	0.485612
2	7.36041	−0.125205
3	7.34857	-1.18×10^{-2}
4	7.34847	-1.02×10^{-4}
5	7.34847	-7.58×10^{-9}

表 24-8　牛顿法求重根

k	x_k	$\delta_k=x_k-x_{k-1}$
1	4.145408	0.145408
2	4.22138	0.075974
3	4.26033	0.038952
4	4.28007	0.019740
5	4.29001	0.009939

如果继续计算下去，需要迭代 19 次。由以上计算结果可以猜想，$f(x)=0$ 在 $x=4.2$ 附近确实有根且为重根，用牛顿法计算，收敛速度减慢，每一个 δ 大致是前一次迭代的一半。

事实上，因为 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\dfrac{(x_k-x^*)g(x_k)}{mg(x_k)+(x_k-x^*)g'(x_k)}$，令 $e_k=x_k-x^*$，则 $e_{k+1}=x_{k+1}-x^*=e_k-\dfrac{e_k g(x_k)}{mg(x_k)-e_k g'(x_k)}$，有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k}=\lim_{x_k\to x^*}[1-\frac{g(x_k)}{mg(x_k)+e_k g'(x_k)}=1-\frac{1}{m}\neq 0 \tag{24-21}$$

可见用牛顿法求方程的重根仅为线性收敛。

为了提高求重根的收敛速度，有两种可供选择的方法。方法之一是将求重根的问题转化为求单根，注意到函数

$$u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{(x-x^*)g(x)}{mg(x)+(x-x^*)g'(x)}=(x-x^*)Q(x)$$

$Q(x^*)=\dfrac{1}{m}\neq 0$，$x^*$ 是 $u(x)=0$ 之单根。因此，求 $f(x)=0$ 之 m 重根 x^* 等价于求 $u(x)=0$ 之单根 x^*，而对 $u(x)=0$ 用牛顿迭代法求根则是平方收敛的，其迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{u(x_k)}{u'(x_k)}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)} \tag{24-22}$$

上述迭代格式右端较复杂，应用起来不方便。另一种求 m 重根的方法是采用如下迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{24-23}$$

其中 m 为根的重数，（24-23）式称为带参数的牛顿迭代格式。可以证明它是求 m 重根 x^* 的具有平方收敛的迭代格式。

问题是如何确定根的重数 m。下面介绍一个边迭代边估计重数的方法。设 x_{k-2},x_{k-1},x_k 为用牛顿迭代格式（24-16）所得三个相邻的迭代值，令

$$\lambda_k=\frac{x_k-x_{k-1}}{x_{k-1}-x_{k-2}}$$

则 $\lambda_k=\dfrac{(x_k-x^*)-(x_{k-1}-x^*)}{(x_{k-1}-x^*)-(x_{k-2}-x^*)}=\dfrac{e_k-e_{k-1}}{e_{k-1}-e_{k-2}}=\dfrac{e_k}{e_{k-1}}\cdot\dfrac{1-\dfrac{e_{k-1}}{e_k}}{1-\dfrac{e_{k-2}}{e_{k-1}}}$，由式（24-21）可知，

$\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=1-\dfrac{1}{m}=\dfrac{m-1}{m}$。故 $\lambda_k=\dfrac{x_k-x_{k-1}}{x_{k-1}-x_{k-2}}\approx\dfrac{m-1}{m}$。因此，可用下式估计 m，

$$m\approx\frac{1}{1-\lambda_k} \tag{24-24}$$

用带参数的牛顿迭代法求方程 $f(x)=(x-1)[\sin(x-1)+3x]-x^3+1=0$ 在 0.95 附近之根。

解：取 $x_0=0.95$，用牛顿迭代法求得的 x_k 见表 24-9。由表 24-9 中数据可见 x_k 收敛很慢。由 $\dfrac{1}{1-\lambda_k}\approx 2$ 可知，所求根为 m=2 重根，改用式（24-23）迭代格式，得

$$x_0=0.95,\ x_1=0.9988559,\ x_2=x_3=1$$

收敛速度大大快于直接用牛顿迭代公式。

表 24-9　带参数的牛顿迭代法

k	x_k	λ_k	$\frac{1}{1-\lambda_k}$
0	0.95		
1	0.9744279		
2	0.9870583		
3	0.9934878	0.5090	2.0369
4	0.9967328	0.5047	2.0190
5	0.9983576	0.5007	2.0028
6	0.9991901	0.5125	2.0511

练习 15　不同迭代格式和算法比较。用下列迭代格式求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在 x=1.5 附近的根。

(1)　$x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+1}$；(2)　$x_{k+1}=x_k^3-1$；

(3)　分别对（1），（2）两种格式用迭代加速法。

假收敛现象及避免方法。已知方程 $f(x)=(e^x+e^{-x})\cos x-2=0$ 的最小正根在(3.5,5)

内，试用割线法求此根。

解：割线法迭代公式为 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)(x_k-x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$，用四组不同的初值 x_0,x_1 进行迭代，结果如下：

(1) $x_0^{(1)}=3.8, x_1^{(1)}=3.9, x_4^{(1)}=x_5^{(1)}=-3.635727, f(x_5^{(1)})=-17.070775$

(2) $x_0^{(2)}=3.9, x_1^{(2)}=4, x_3^{(2)}=x_4^{(2)}=4, f(x_4^{(2)})=-37.6997$

(3) $x_0^{(3)}=3.95, x_1^{(3)}=4, x_9^{(3)}=x_{10}^{(3)}=3.918114, f(x_{10}^{(3)})=-37.89988$

(4) $x_0^{(4)}=4, x_1^{(4)}=4.1, x_8^{(4)}=x_9^{(4)}=4.730041, f(x_9^{(4)})=-2.253056\times10^{-5}$

每一组迭代值都出现了 $x_k=x_{k-1}$ 情况，继续迭代不会再有改善，表面上看似乎得到了四个根，其中第（3）组结果 $x_{10}^{(3)}=3.918114$ 为所求的最小正根，然而由函数的图形可见，在区间(3.5,5)内方程只有一个根。由各组结果对应的函数值 $f(x_k)$ 可以看出，只有第（4）组结果 $x_8^{(4)}=x_9^{(4)}=4.730041$ 才是所求最小正根的近似值，其它各组结果均为“假收敛”。

为什么会发生如此严重的假收敛现象呢？现以第（2）组计算结果为例分析如下：由于 $x_0^{(2)}=3.9, x_1^{(2)}=4$ 都靠近曲线 $f(x)$ 的极小值，因此过 $(3.9, f(3.9))$ 与 $(4, f(4))$ 两点的弦线 L 与 x 轴夹角较小，从而与 x 轴的交点 $x_2^{(2)}=25.20078$ 远离 $x_1^{(2)}$，且 $f(x_2^{(2)})=8.781153\times10^{10}$ 非常大，再往下迭代，得

$$x_3^{(2)}=x_2^{(2)}-\frac{f(x_2^{(2)})(x_2^{(2)}-x_1^{(2)})}{f(x_2^{(2)})-f(x_1^{(2)})}=4,\quad f(x_3^{(2)})=-37.6997$$

$$x_4^{(2)}=x_3^{(2)}-\frac{f(x_3^{(2)})(x_3^{(2)}-x_2^{(2)})}{f(x_3^{(2)})-f(x_2^{(2)})}=4-\frac{-37.6997(4-25.20078)}{-37.6997-8.781153\times10^{10}}=4$$

（分母太大，第二项不起作用）

在牛顿迭代法中也可能出现假收敛现象。因此在输出迭代结果 x_k 的同时还应输出 $f(x_k)$ 之值，以鉴别是否假收敛。

避免假收敛的方法之一是适当选择迭代初值，使之远离极值点；方法之二是改变方程形式，使 $f(x)$ 在根的附近变化不太激烈。例如，将实验 10 中方程转化为等价方程

$$g(x)=\cos x-\frac{2e^{-x}}{1+e^{-2x}}=0$$

画出 $g(x)$ 的图形（如图 24-7 所示），对此方程应用割线法，仍分别取上述四组初值 x_0,x_1，迭代结果均为

$$x_5=x_6=4.730041$$
$$g(x_5)=g(x_6)=-1.974404\times10^{-7}$$

可见对方程作上述等价变形后，不仅保证了迭代过程的收敛性，而且收敛速度很快。

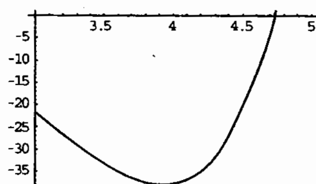


图 24-7 $g(x)$ 的图形

实验 11 对于迭代法 $x_{k+1}=0.99x_k-x_k^2\ (k=0,1,2,\cdots)$，它显然有不动点 $x^*=0$。假设我们不知道它收敛的阶数（实际上为 1），能否设计一个实验得到收敛阶数的近似值？

解：假设它的收敛阶为 p，应当存在常数 $c>0$，使得

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p}\to c$$

当 k□ 1时，上式可以近似地写成

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p}\approx c \tag{24-25}$$

将（24-25）式两边取对数得到

$$\ln e_{k+1}\approx p\ln e_k+\ln c \tag{24-26}$$

(24-26)式指出：$\ln e_{k+1}$ 和 $\ln e_k$ 之间应当近似地有线性关系，$\ln e_{k+1}$ 和 $\ln e_k$ 之间直线的斜率正好是 p。

现在取一个初始值 $x_0=0.5$，迭代 30 次，并画出 $\ln e_{k+1}$ 和 $\ln e_k$ 之间的图形如图 24-8。

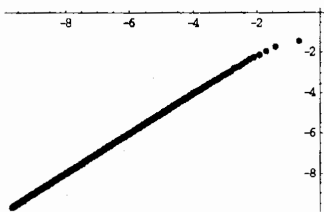


图 24-8 $\ln e_{k+1}$ 和 $\ln e_k$ 之间的图形

可以看出它的确近似一条直线。再用最小二乘法拟合，得到该直线的斜率（也即迭代法的阶）$p\approx 1.0629$。

为什么数值实验的结果和理论结果不一致？这是因为式（24-26）只是近似地成立，而且我们没有考虑当 $e_k\approx 0$ 时舍入误差的影响。即便如此，数值实验也定性地告诉我们迭代法的收敛性态。

练习 16 找出一维搜索的最佳方法。

假设在 $f(x)=0$ 在$[a, b]$区间内只有一个根（可以是重根），求解该方程等价于在区间$[a, b]$上找$|f(x)|$的极小值点，设计一种寻找极小值点的方法，使得计算 $f(x)$ 的次数尽可能少，并完成数值实验。你能从理论上证明你的搜索方法最好吗？

练习 17 设计一个数值实验，在数值上估计割线法的收敛阶。

练习 18 了解牛顿法收敛域的结构和“局部”收敛性。

牛顿法可以直接用来求解复数方程 $z^3-1=0$，在复平面上它的三个根是 $z_1^*=1$，$z_{2,3}^*=-\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}\mathrm{i}$。选择中心位于坐标原点、边长为 2 的正方形内的点为初始值。把收敛到 8 个不同根的初始值分别标上不同颜色。只要计算足够多的点，你将得到关于牛顿法收敛域的彩色图片。

练习 19 研究一般迭代公式的复杂行为，初步看到混沌现象。

迭代公式 $x_{k+1}=\lambda x_k(1-x_k)$（$k=0,1,2,\cdots$）取[0.2,4]中不同的 λ 值，并取 $x_0\in(0,1)$ 进行计算。画出 λx_k 和 $\lambda\ (k>50)$ 之间的关系图。

24.5 值得进一步研究的问题

问题 1 数据误差对根的影响。给定方程

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)\\&=x^7-28x^6+322x^5-1960x^4+6769x^3-13132x^2+13068x-5040=0\end{aligned}$$

若对其 x^6 项系数引入微小扰动，其它系数不变，使之变为

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x)-0.002x^6\\&=x^7-28.002x^6+322x^5-\cdots=0\end{aligned}$$

试分析扰动方程 $f(x)=0$ 之根的特点。

问题 2 根的搜索。用逐步搜索法求出下列方程 $f(x)=0$ 在指定范围内的所有实根的隔根区间，并绘出 $f(x)$ 在 x 轴附近的图形。注意，所给方程可能有重根，观察在重根附近搜索时可能出现的现象。

(1) $f(x)=x^4-8.6x^3-35.51x^2+464.4x-998.46=0,\qquad 4\leqslant x\leqslant 8$；

(2) $f(x)=x^4-115x^3+1575x^2-7625x+12500=0,\qquad 4.95\leqslant x\leqslant 5.1$；

(注意，$x^*=5$ 为其三重根)

(3) $f(x)=x^2+2xe^x+e^{2x}=a,\quad -4\leqslant x\leqslant 3$，其中 $a=0,9,81$。

问题 3 迭代法的收敛性与收敛速度比较。

用下列方案求方程 $f(x)=x^3-\sin x-12x+1$ 的全部实根，$\varepsilon=10^{-6}$，并比较取相同迭代初值时各方法的收敛速度。

方案 I 用牛顿法；方案 II 用普通迭代法，参考迭代格式（1）、（2）。方案 III 用迭代加速法。

(1) $x=\varphi_1(x)=\sqrt[3]{12x+\sin x-1},\quad -4\leqslant x\leqslant -3$ 或 $3\leqslant x\leqslant 4$

(2) $x=\varphi_2(x)=\frac{1}{12}(x^3-\sin x+1),\quad 0\leqslant x\leqslant 0.2$

问题 4 求 $f(x)=(\sin x)^6e^{20x}\tan(1-x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的极大值点与极小值点。（提示：若用牛顿法，则直接对 $f'(x)=0$ 求解是很不利的，应将方程化简后再求解）

问题 5　在曲线 $y=x^2$ 上求一点，使它到点(2,3)的距离最小，并求此最小距离。

问题 6　在什么条件下，只要初始点足够靠近不动点，函数 $f(x)$ 的迭代一定收敛到不动点？

问题 7　在什么条件下，无论初始值如何靠近不动点，迭代都不收敛到指定的不动点？什么是边际情况？

问题 8　在什么情况下可以修改迭代过程以保证收敛到给定的不动点?关于收敛到不动点的速度，你能得出什么结论？你能给出收敛特别快或特别慢的例子吗？修改过的迭代和简单迭代的收敛速度相比如何？

问题 9　几乎前面给出的所有算法都适用于求代数方程的复数根，试用几种方法得到 $x^{41}+x^3+1=0$ 在 $x_0=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{41}\mathrm{i}}$ 附近的根。

问题 10　设 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上有一个根 x^*。当 $|f(x_k)$□ 1 时可以用

$$f'(x_k)\approx\frac{f(x_k+f(x_k))-f(x_k)}{f(x_k)}$$

近似代替 $f'(x_k)$。这时牛顿迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f^2(x_k)}{f(x_k+f(x_k))-f(x_k)},\quad k=0,1,2,\cdots$$

证明该迭代法的收敛阶是 2。

提示：可以用两种不同方法：

(1) 利用有关阶的概念，把 $f(x+f(x))$ 在 x_k 处作泰勒展开。

(2) 直接利用收敛性定理和洛必达法则。

问题 11　牛顿法是利用函数 $f(x)$ 的线性泰勒展开近似原来的函数而得到的，如果把函数在 x_k 完成二次泰勒展开，并求解

$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+f''(x_k)(x-x_k)^2=0$$

得到下一个近似，请你

(1) 写出一个算法公式实现上述想法；

(2) 列出算法可能遇到的问题；

(3) 分析算法的收敛性。

问题 12　如果一个迭代法是超线性收敛的，证明当 n 充分大时 $\ln e_{n+1}-\ln e_n$ 是关于 n 的减函数。如果迭代法是线性收敛的，结论如何？

实验二十五　线性方程组的数值解法

在科学技术和工程设计中，很多问题都涉及下面的大型线性方程组的求解。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{25-1}$$

为方便起见，常将线性方程组（25-1）表示成矩阵形式

$$\boldsymbol{Ax=b} \tag{25-2}$$

其中，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$。分别称为方程组（25-2）的系数矩阵，解向量和右端向量。若 A 可逆，则式（25-2）存在唯一解。

线性代数方程组可直接模拟很多实际问题，如电网络问题、结构设计问题等，也来自计算数学本身，在数据处理和曲线拟合中，大量的线性和非线性的微分方程，如用有限差分法或有限元法求解时得到的离散方程组，它们多数是大型稀疏（A 的元素中大多数为零）方程组。

虽然已学过加减消元法、代入消元法、矩阵变换法和克莱姆（Gram）法则等，但是永远满足不了实际计算的需要。我们对克莱姆法则很熟悉，但它只适合于很少的情况。当 n 稍大，比如 n=24，用克莱姆法则需要计算 A 的 24 阶行列式，如果按行列式的定义去计算，需 24!×23 次乘法运算。在每秒 1000 万次乘除运算的计算机上计算，需花的 CPU 时间为 4.5×10^{10} 年。它完全不适合高阶方程组。科学和工程计算经常需要求解 100 个变量、1000 个变量、甚至上万个变量的方程组。因此，有必要寻求更有效的解法。线性方程组的解法一般有两类：

直接法：经过有限次算术用运算求出精确解（实际上由于有舍入误差，只能得到近似的解）。对于中小型方程组，常选用直接法，因为直接法能在预定的计算步数内求得精确解（不计舍入误差），可靠且效率高。本实验将介绍这类方法中最基本的高斯（Gauss）消去法及与它密切相关的矩阵 LU 分解，并对误差分析作简单讨论。

迭代法：从初始解出发，根据设计好的格式用逐次求出的近似解逼近精确解。对于高阶的，特别是大型稀疏方程组，由于直接法的存储量和计算量太大，通常迭代法是有效的。本实验将介绍雅可比（Jacobi）迭代法和高斯-赛德尔（Gauss-Seidel）迭代法，并对迭代的收敛性作一些简单的研究。

直接法的优点是计算量小，并且可以事先估计，它的缺点是所需储单元较多，编程复杂。迭代法的优点是：原始系数矩阵始终不变，因而算法简单，编程较方便且所需存储单元也很少。缺点是存在收敛性和收敛速度的问题，因而只对系数矩阵具有某些性质的方程组才适用。

25.1　直 接 法

高斯消去法在线性代数课程中已学习过，这里再次提及是想研究系数矩阵的变化规律，

并在此基础上对高斯消去法作些改进。

将方程组（25-2）记为

$$A^{(1)}x=b^{(1)} \tag{25-3}$$

其中，$A^{(1)}=(a_{ij}^{(1)})=(a_{ij})=A$，$b^{(1)}=(b_1^{(1)},b_2^{(1)},\cdots,b_n^{(1)})^{\mathrm{T}}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}=b$。

第一步，设$a_{11}^{(1)}\neq 0$，利用$a_{11}^{(1)}$消去（25-3）中除第 1 个方程外其余各方程的x_1，即将第 1 个方程乘以$-l_{i1}$，

$$l_{i1}=\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}},\quad i=2,3,\cdots,n$$

加到第$i(i=2,3,\cdots,n)$个方程上去，得到（25-3）的等价方程组

$$A^{(2)}x=b^{(2)} \tag{25-4}$$

其中，$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-l_{i1}a_{1j}^{(1)}$，$i,j=2,3,\cdots,n$，$b_i^{(2)}=b_i^{(1)}-l_{i1}b_1^{(1)}$，$i=2,3,\cdots,n$。

从矩阵运算的观点看，实质上相当于用初等矩阵

$$L_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -l_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

分别左乘$A^{(1)}$及$b^{(1)}$，即

$$L_1A^{(1)}=A^{(2)},\quad L_1b^{(1)}=b^{(2)}$$

第二步，方程组（25-4）的第 1 个方程不变，若$a_{22}\neq 0$，采用与第一步相似的方法，利用$a_{22}^{(2)}$消去第 3 至第n个方程中的x_2，即将第 2 个方程乘以$-l_{i2}$，即

$$l_{i2}=\frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}},\quad i=3,4,\cdots,n$$

加到第$i(i=3,4,\cdots,n)$个方程上去，得到（25-3）的等价方程组

$$A^{(3)}x=b^{(3)}$$

其中$a_{ij}^{(3)}=a_{ij}^{(2)}-l_{i2}a_{2j}^{(2)}$，$i,j=3,4,\cdots,n$，$b_i^{(3)}=b_i^{(2)}-l_{i2}b_2^{(2)}$，$i=3,4,\cdots,n$。与第一步相似，第二步相当于用

$$L_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -l_{22} & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0\\ 0 & -l_{n2} & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

分别左乘$A^{(2)}$和$b^{(2)}$，即$L_2A^{(2)}=A^{(3)},L_2b^{(2)}=b^{(3)}$。

一般地，第k步，若$a_{kk}^{(k)}\neq 0$，则利用$a_{kk}^{(k)}$作第k次消元，即将第k个方程乘以$-l_{ik}$，

$$l_{ik}=\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},\quad i=k+1,k+2,\cdots,n \tag{25-5}$$

加到第$i(i=k+1,k+2,\cdots,n)$个方程上去，得到（25-3）的等价方程组

$$A^{(k+1)}x=b^{(k+1)} \tag{25-6}$$

其中

$$a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-l_{ik}a_{kj}^{(k)},\quad i,j=k+1,k+2,\cdots,n$$

$$b_i^{(k=1)}=b_i^{(k)}-l_{ik}b_k^{(k)},\quad i=k+1,k+2,\cdots,n$$

通常称l_{ik}为消元因子。

同理，第k步相当于用

$$L_k=\begin{array}{c} (k) \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 1 & & & & \\ 0 & \cdots & -l_{k+1,k} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & -l_{k+1,n} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

分别左乘$A^{(k)},b^{(k)}$，即

$$L_kA^{(k)}=A^{(k+1)},L_kb^{(k)}=b^{(k+1)}$$

上述作法，直到第$n-1$步做完，得到（25-3）的等价方程组为

$$A^{(n)}x=b^{(n)} \tag{25-7}$$

其中　　$a_{ij}^{(n)}=a_{ij}^{(n-1)}-l_{i,n-1}a_{nj}^{(n-1)}$，$b_i^{(n)}=b_i^{(n-1)}-l_{i,n-1}b_i^{(n-1)}$。

由（25-3）式约化到（25-7）式的过程称为高斯消去法的消元过程。从矩阵运算的观点看，就是连续对$A^{(1)},b^{(1)}$左乘初等矩阵$L_1,L_2,\cdots,L_{n-1}$，即

$$L_{n-1}L_{n-2}\cdots\cdots L_2L_1A^{(1)}=A^{(n)} \tag{25-8}$$

$$L_{n-1}L_{n-2}\cdots\cdots L_2L_1b^{(1)}=b^{(n)} \tag{25-9}$$

为简单起见，令$A^{(n)}=U$其中U为上三角矩阵

$$U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

于是（25-3）式可写成

$$Ux=Lb \tag{25-10}$$

这就是消去法最终得到的（25-3）式的矩阵表达形式，因为U可逆，所以方程组（25-10），也即方程组（25-3）的解为

$$x=U^{-1}Lb \tag{25-11}$$

这样，求解（25-3）相当于通过A左乘单位下三角阵化为上三角阵的过程，而且可以证明，消元中关于$a_{kk}^{(k)}\neq 0(k=1,2,\cdots,n)$的假设，等价于系数矩阵$A$的顺序主子式$D_k=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}(k=1,2,\cdots,n)$不等于零。

需要指出的是：①当线性方程组的系数矩阵 A 为实对称正定矩阵时，在进行高斯消元过程中总能保证 $a_{kk}^{(k)} \neq 0(k=1,2,\cdots,n)$，因此可以直接使用高斯消去法求解；②高斯消去法的总运算量为：$\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}$ 次乘除法，$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}n$ 次加减法，因此高斯消去法的计算量为 $O(n^3)$。

思考：(1) 为什么 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ 等价于 A 的顺序主子式 $D_k \neq 0$（可就 $k=1,2$ 的情况说明）。

(2) 为什么系数矩阵 A 为实对称正定矩阵时，可直接利用高斯消去法？

(3) 试比较高斯消去法和克莱姆法则的运算量（可以 $n=10$ 为例说明）。

(4) 若 $a_{11}=0, \det(A) \neq 0$, 如何利用高斯消去法求解 $Ax=b$?

实验1 用高斯消去法解方程组 $\begin{cases}0.003x_1+59.14x_2=59.17\\5.291x_1-6.130x_2=46.78\end{cases}$，（它的精确解为 $x_1^*=10, x_2^*=1$）。

解：利用高斯消去法，其消去因子 $l_{21}=\frac{5.291}{0.003}\approx 20000$，则有

$$\begin{pmatrix}0.003 & 59.14\\0 & -104300\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}59.17\\-104400\end{pmatrix}$$

解得 $x_2=1.001, x_1=-10$，其中 x_1 与 x_1^* 反了号。

主要原因是出现了小主元 0.003。在求 x_1 时，消去因子 l_{21} 将 x_2 的误差 0.001 放大了约 20000 倍，同时又出现了两个相近数相减严重损失有效位的问题，从而使解严重失真。消去因子过大是造成误差迅速传播和算法数值不稳定的主要因素。

如果把两个方程次序交换，即

$$\begin{pmatrix}5.291 & -6.130\\0.003 & 59.14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}46.78\\59.17\end{pmatrix}$$

作高斯消元时，消去因子 $l_{21}=\frac{0.003}{50291}=0.0005760 \ll 1$，消元后

$$\begin{pmatrix}5.291 & -6.130\\0 & 59.14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}46.78\\59.14\end{pmatrix}$$

解得 $x_2=1.00=x_2^*$，$x_1=10.00=x_1^*$。

因此，只要 $\det A \neq 0$，原方程组一定存在唯一解，且又不是病态方程组的话，总可以对方程组进行行交换或列交换来消除零主元和小主元，这就是选主元的思想。

下面我们将讨论列主元的消元法：在完成第 $k-1$ 步消元后，

$$A^{(k)}=\begin{pmatrix}a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & & \cdots & & a_{1n}^{(1)}\\ & a_{22}^{(2)} & & \cdots & & a_{2n}^{(2)}\\ & & \ddots & \cdots & & \vdots\\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)}\\ & & & a_{k+1,k}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)}\\ & & & \vdots & \vdots & \vdots\\ & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)}\end{pmatrix}$$

选出第 k 列 $|a_{k,k}^{(k)}|,|a_{k+1,k}^{(k)}|,\cdots,|a_{n,k}^{(k)}|$ 中最大者，即 $\max\limits_{k\leqslant i\leqslant n}|a_{i,k}^{(k)}|=|a_{i_k,k}^{(k)}|$。就将此元素 $a_{i_k,k}^{(k)}$ 作为新的主

对角元 $a_{k,k}^{(k)}$，为达到这点，需作第 k 行与第 i_k 行的交换，当然方程组的右端项 $b^{(k)}$ 的元素也应作相应的行交换。此时，消去因子 $|l_{ik}|=\left|\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{i_k,k}^{(k)}}\right|\leqslant 1$。

因此一般地能保证舍入误差不扩散，这一方法基本上是稳定的。

实验 2 用高斯消去法与选列主元法解方程组

$$\begin{pmatrix} 0.0071 & 3.8657 & 1.1023 & 3.1243 \\ 0.1234 & 1.2343 & 2.3044 & 1.6257 \\ 9.9274 & -4.9258 & 8.5042 & -3.4253 \\ 7.5433 & 9.9995 & 10.6278 & -7.0147 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8.0904 \\ 5.2878 \\ 9.4805 \\ 21.2009 \end{pmatrix}$$

解：计算结果见表 25-1。

表 25-1 解的比较

	高斯消去法		选列主元法	
	x	$Ax-b'$	x	$Ax-b$
x_1	1.000015	0	1.000000	0
x_2	1.00001	3.814697E-6	1.000000	4.768372E-7
x_3	1.000006	1.850128E-4	1.000000	0
x_4	0.9999858	3.738403E-4	1.000000	0

事实上，精确解为 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$，可见选主元的计算结果优于不选主元，这说明选列主元法确实比高斯消去法数值稳定性好。

在一些特殊情况下，选主元与不选主元一样，为了节省机时就可以不选主元。例如在实际工作中常见其元素满足如下条件的矩阵

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \quad ,i=1,2,\cdots,n$$

即对角线上每一元素的绝对值均大于同行其它各元素绝对值之和，或

$$|a_{jj}|>\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}|a_{ij}| \quad ,j=1,2,\cdots,n$$

即对角线上每一元素的绝对值均大于同列其它各元素绝对值之和，这样的矩阵统称为严格对角占优矩阵。

可以证明，严格对角占优矩阵必定是非奇异的。若 A 对称且严格对角占优，则消元过程中第 k 步主元必为 $a_{kk}^{(k-1)}$，因此不必选主元，用高斯消去法求解即可。

练习 1 分别用高斯消去法和选列主元消去法解线性方程组。

$$\begin{cases} 12x_1-3x_2+3x_3=15 \\ -18x_1+3x_2-x_3=-15 \\ x_1+x_2+x_3=6 \end{cases}$$

练习 2 用选列主元消去法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3=3 \\ 2x_1-5x_2+2x_3=-1 \\ x_1+2x_2+6x_3=9 \end{cases}$　　　(2) $\begin{cases} -5x_1+x_2-x_3=-6 \\ x_1+5x_2-2x_3=-1 \\ -x_1-x_2+4x_3=3 \end{cases}$

并观察每步消元结果的系数矩阵有何特点，右下方矩阵是否对称，列主元在何处？

25.2 矩阵的 LU 分解

高斯消去法的过程说明，矩阵 A 左乘单位下三角阵 M，可化为上三角阵 U，即

$$MA=U$$

因为单位下三角阵的逆仍为三角阵，记 $M^{-1}=L$，我们可以得出如下结论：

若 n 阶矩阵 A 可逆且顺序主子式不为零，则 A 可分解为一个单位下三角阵 L 和一个上三角阵 U 的乘积

$$A=\mathrm{LU} \tag{25-12}$$

可以证明分解是唯一的，这种分解称为矩阵 LU 分解。

由前面的分析可知，可以用高斯消去法求矩阵 A 的 LU 分解。事实上，有

$$\begin{cases} u_{k,j}=a_{kj}-\sum_{s=1}^{k-1} l_{k,s}u_{s,j} & k=1,2,\cdots,n; i=k,k+1,\cdots,n \\ l_{i,k}=\left[a_{ik}-\sum_{s=1}^{k-1} l_{is}u_{sk}\right] \Big/ u_{kk} & k=1,2,\cdots,n; i=k+1,k+2,\cdots,n \end{cases} \tag{25-13}$$

如果只知道矩阵 A 可逆而不能保证其顺序主子式不为零，那么在消元过程中可能会遇到某个 $a_{kk}^{(k)}=0$ 的情况，但这时必至少有一个 $a_{ik}^{(k)}\neq 0 \quad (i=k+1,\cdots,n)$，但需像选列主元消去法那样，将 k 行与第 i 行交换，就可以继续施行前面的消元过程，而这种行交换相当于 A 左乘一个由单位阵第 k 行与第 i 行交换所得的初等交换矩阵 E_{ki}，于是将 A 化为上三角矩阵 U 的过程相当于 A 左乘一系列的初等交换矩阵和单位下的三角阵，可写作

$$M_{n-1}E_{k-1,i_{k-1}}\cdots M_1E_{1,i_1}A=U \tag{25-14}$$

记 $E_{k-1,i_{k-1}}\cdots E_{1,i_1}=P$，$P$ 是单位阵经若干次行交换得到的交换阵，由（25-14）式，可推出，

$$MPA=U \tag{25-15}$$

记 $M^{-1}=L$，就得到以下结论：

若 n 阶矩阵 A 可逆，则存在交换阵 P，使

$$PA=\mathrm{LU} \tag{25-16}$$

其中 L,U 分别为单位下三角阵和上三角阵。

求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 12 \end{bmatrix}$ 的 LU 分解。

解：$A=\mathrm{LU}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$。有了矩阵 A 的 LU 分解计算公式，即可得解线性方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 的 LU 分解法。当要解多个系数矩阵为 A 的线性方程组时，LU 分解法就显得特别优越，只要对系数矩阵作一次 LU 的分解，以后只要解三角形方程组即可。

一些实际问题如用有限元法作结构力学计算，常归结为求解系数矩阵对称正定的线性方程组，这时形如式（25-12）的 LU 分解有更简化的形式：

若矩阵 A 对称正定，则必存在单位下三角阵 L 及对角阵 D，使得

$$A = LDL^{\mathrm{T}} \tag{25-17}$$

式（25-17）称为对称正定矩阵 A 的乔累斯基（Cholesky）分解。若记 $d_i = u_{i,i}$，注意到 $u_{sk} = d_s l_{is}$，则由 A 的 LU 分解式（25-13）可得乔累斯基分解的计算公式为

$$\begin{cases} d_i = a_{ii} - \sum\limits_{s=1}^{i-1} d_s l_{is}^2 \\ l_{ik} = \left(a_{ik} - \sum\limits_{s=1}^{k-1} d_s l_{is} l_{ks} \right) \Big/ d_k \end{cases} \quad k = 1, 2, \cdots, i-1 \tag{25-18}$$

利用乔累斯基分解法求解方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$，即

$$LL^{\mathrm{T}} x = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ L^{\mathrm{T}} x = y \end{cases}$$

计算公式为

$$\begin{aligned} & y_1 = b_1,\ y_i = (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k) \Big/ l_{ii},\quad i = 2, 3, \cdots, n \\ & x_n = y_n / l_{nn},\ x_i = (y_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ki} x_k) \Big/ l_{ii},\quad i = n-1, n-2, \cdots, 1 \end{aligned} \tag{25-19}$$

称此计算过程为乔累斯基方法或称平方根法。

实验 4　用乔累斯基方法解方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7.25 \end{pmatrix}$$

解：显然 $A = A^{\mathrm{T}}$，且 A 的各阶顺序主子式 $D_1 = 4 > 0, D_2 = 16 > 0, D_3 = 16 > 0$，因此 A 是对称正定的。选用乔累斯基方法，对 A 作 $L \cdot L^{\mathrm{T}}$ 分解，得

$$L = \begin{pmatrix} 2 & & \\ -0.5 & 2 & \\ 0.5 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}$$

解 $Ly = b$，即得 $y = (2, 3.5, 1)^{\mathrm{T}}$ 再解 $L^{\mathrm{T}} x = y$，得 $x = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$。

如果对矩阵采用分解式 $A=LDL^{\mathrm{T}}$，则可避免开平方根运算，称为改进的平方根法。它既适合于求解对称正定方程组，也适合于求解 A 对称且其顺序主子式全不为零的方程组。可以得到改进平方根法的计算公式（25-18）。并且按下式求解方程组 $Ax=b$。

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^{\mathrm{T}} x = D^{-1} y \end{cases}$$

练习 3　LU 分解法的优点。给定矩阵 A 与向量 b

$$A=\begin{bmatrix} n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \\ n-1 & n & \cdots & 3 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & n & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{bmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}$$

(1) 求 A 的分解；

(2) 利用 A 的 LU 分解解下列方程组：

① $Ax=b$；② $A^2x=b$；③ $A^3x=b$。

对第③题分析一下，如果先求 $M=A^3$，再解 $Mx=b$，有何缺点？

(3) 利用 A 的 LU 分解法求 A^{-1}，其中 n 由自己选择，例如取 $n=5,10$。

提示：A^{-1} 的第 k 列为方程组 $Ax=e_k=(0,\cdots,0,\overset{k}{1},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 之解，A^{-1} 的准确解为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{n+2}{2n+2} & -\frac{1}{2} & & & & \frac{1}{2n+2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ & -\frac{1}{2} & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2n+2} & & & & -\frac{1}{2} & \frac{n+2}{2n+2} \end{pmatrix}$$

25.3 方程组的性态和条件数

对于实际问题导出的方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$，系数矩阵 A 和右端向量 $\boldsymbol{b}$ 往往带有误差(扰动)，下面讨论 A 或 $\boldsymbol{b}$ 的微小变化对解 x 的影响。设方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 6.00001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 8.00001 \end{pmatrix} \tag{25-20}$$

有精确解 $(1,1)^{\mathrm{T}}$。对矩阵和方程的右端项作微小的变化，

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 5.99999 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 8.00002 \end{pmatrix}$$

其解变为 $(10,-2)^{\mathrm{T}}$。扰动后方程组的解面目全非了，真所谓“差之毫厘，失之千里”。这种现象的出现是完全由方程组的性态决定的，即 $\boldsymbol{x}$ 对 A 和 $\boldsymbol{b}$ 的扰动是敏感的。

对于一般的方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$，如果解 $\boldsymbol{x}$ 对 A 或 $\boldsymbol{b}$ 的扰动敏感，就称方程组是病态的，也称系数矩阵 A 是病态的。可以想到，几近奇异的矩阵大概是病态的。为了定量地估计 $\boldsymbol{x}$ 对 A 或 $\boldsymbol{b}$ 的扰动敏感程度，需要一种能刻画矩阵和方程组“病态”程度的标准，向量范数和矩阵范数正是这样的指标。

定义 1 对任意 n 维向量 $\boldsymbol{x}\in R^n$，若对应非负实数 $\|\boldsymbol{x}\|$，满足

(1) $\|x\|\geqslant 0$，等号仅当 x=0 时成立；

(2) 对任何实数 λ，$\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$；

(3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$。

则称$\|x\|$为向量 x 的范数或模。

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，常用的向量范数有

$$\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$$

$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$$

$$\|x\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

分别称为向量的无穷范数，1－范数，2－范数。这几种范数满足以下关系：

$$\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_1\leqslant\sqrt{n}\|x\|_\infty，\quad \|x\|_\infty\leqslant\|x\|_2\leqslant\sqrt{n}\|x\|_\infty$$

定义 2　对任意 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，若对应一个非负实数$\|x\|$，满足

(1) $\|A\|\geqslant 0$，等号仅当 A=0 时成立;

(2) 对任意实数$\alpha,\|\alpha A\|=|\alpha|\cdot\|A\|$；

(3) 对任意两个 n 阶方阵 A,B，$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$

(4) $\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$。

则称$\|A\|$为矩阵 A 的范数。常用的矩阵范数有

$$\|A\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_1=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$$

它们分别叫做矩阵的无穷范数，1-范数，2-范数，其中$\lambda_{\max}(A^TA)$为 A^TA 的最大特征值，由于矩阵的 2-范数与 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值有关，所以又称为谱范数。

在误差估计中，总希望矩阵与向量之积 Ax 满足不等式

$$\|Ax\|\leqslant\|A\|\cdot\|x\|$$

但对任意的向量范数与矩阵范数，上述不等式未必成立。因而特别把满足此不等式的一对范数称为相容的。可以证明，向量的 p－范数与矩阵的 p－范数($p=1,2,\infty$)是相容的，即

$$\|Ax\|_1\leqslant\|A\|_1\cdot\|x\|_1$$

$$\|Ax\|_2\leqslant\|A\|_2\cdot\|x\|_2$$

$$\|Ax\|_\infty\leqslant\|A\|_\infty\cdot\|x\|_\infty$$

在使用范数时，应选用相容的矩阵范数与向量范数。

如何衡量方程组的病态程度?先看一个简单情况。设 x 为 $Ax=b$ 的准确解，当方程组右端有小扰动δb，而 A 准确时，受扰解为$x+\delta x$，即

$$A(x+\delta x)=b+\delta b$$

因为 $Ax=b$，所以$\delta x=A^{-1}\delta b$，因此$\|\delta x\|\leqslant\|A^{-1}\|\cdot\|\delta b\|$。

又由$\|b\|=\|Ax\|\leqslant\|A\|\cdot\|\delta b\|$，得$\frac{1}{\|x\|}\leqslant\frac{\|A\|}{\|b\|}$。所以

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\leqslant\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

此不等式表明，解的相对误差不超过 b 的相对误差的$\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$倍。若系数矩阵 A 也有小扰动δA，则还可进一步导出更一般的误差估计式

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\leqslant\frac{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}{1-\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$

这个不等式反映了解的相对误差与 A 及 b 的相对误差的关系：数$\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$越小，解的相对误差也越小；数$\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$越大，解的相对误差也越大。实际上这个数反应了解对原始数据变化的敏感程度，揭示了矩阵 A 和方程组本身的性态，称之为方程组 $Ax=b$ 或矩阵 A 的条件数，记作$\text{cond}(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$。

$\text{cond}(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$越大，$A$ 的病态程度越严重。常用的条件数为

$$\text{cond}_\infty(A)=\|A^{-1}\|_\infty\cdot\|A\|_\infty;\quad \text{cond}_1=\|A^{-1}\|_1\cdot\|A\|_1$$

$$\text{cond}_2(A)=\|A^{-1}\|_2\cdot\|A\|_2=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}\left(A^TA\right)}{\lambda_{\min}\left(A^TA\right)}}$$

分别成为矩阵 A 的∞—条件数，1—条件数，2—条件数。根据条件数的定义，设A^{-1}存在，条件数具有如下性质：

(1) $\text{cond}(A)\geqslant 1,\text{cond}(A)=\text{cond}(A^{-1}),\text{cond}(\alpha A)=\text{cond}(A)$。

(2) 若 A 为正交阵，即$U^TU=E$, 则

$$\text{cond}(U)_2=1,\quad \text{cond}(A)_2=\text{cond}(UA)_2=\text{cond}(AU)_2$$

求条件数要计算逆阵的范数，很不方便，如下一些现象可作为判断矩阵病态的参考。

(1) 在用选列主元消去法时消元过程出现很小的主元；

(2) 矩阵 A 中元素间数量级相差很大；

(3) A 的行列式 $\det(A)$ 满足$\frac{\det(A)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2}}\ll 1$；

(4) 矩阵的某些行（或列）近似线性相关。

实验 5 设在（25-20）式的方程组 $Ax=b$ 中，b 有扰动$\delta b=(0,0.00001)^{\mathrm{T}}$，试计算$\text{cond}_\infty(A)$, 并说明$\delta b$对解向量 x 的影响。

解：易求得$A^{-1}=\begin{pmatrix}300000.5 & -300000\\ -100000 & 100000\end{pmatrix}$，则

$$\text{cond}_\infty(A)=\left\|A^{-1}\right\|_\infty\cdot\|A\|_\infty=6.000005\times 8.00001=4.8\times 8.00001=4.8\times 10^6$$

$$\frac{\|\delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty}\leqslant\text{cond}_\infty(A)\cdot\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}\approx 6$$

这说明右端项向量 b 其分量的百万分之一的变化，可能引起解向量 x 有600%的变化。

实验 6　设 $Ax=b$，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3000 & 2000 & 1000 \\ 4\times10^{-6} & 3\times10^{-6} & 2\times10^{-6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2000 \\ 3\times10^{-6} \end{pmatrix}$$

试验证其为病态方程组，且对其作预处理 $PAx=Pb$，使 $\mathrm{cond}(PA)\ll\mathrm{cond}(A)$。

解：$\mathrm{cond}(A)=1.9201\times10^{10}, x=(-0.16667,1.3333,-0.16667)^{\mathrm{T}}$，若将 a_{33} 改为 3×10^{-6}，b_3 改为 4×10^{-6}，扰动量均为 10^{-6} 量级，则扰动后的方程组的解为

$$\boldsymbol{x}=(-9.5000,16.5000,-2.5000)^{\mathrm{T}}$$

显然，该方程组为病态方程组。

令 $P=\mathrm{diag}\left(1,10^{-3},10^{6}\right)$，使 $PAx=Pb$，其中

$$PA=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, Pb=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

则有 $\mathrm{cond}(PA)=87.354\ll\mathrm{cond}(A), \boldsymbol{x}=(-0.16667,1.3333,-0.16667)^{\mathrm{T}}$。

若对矩阵 PA 中的元素 a_{33} 和向量 Pb 中的 b_3 给以 10^{-5} 的扰动，则方程组的解不受影响。显然，经过预处理后的方程组 $PAx=Pb$ 是良态的。

练习 4　设 $A\in R^{n\times n}$ 是一个对称正定矩阵。$\lambda_1(\lambda_n)>0$ 分别是它的最大（小）的特征值，$Z_1(Z_n)$ 是对应 $\lambda_1(\lambda_n)$ 的特征向量，而且 $\|Z_1\|_2=\|Z_n\|_2=1$。

(1) 试说明 $\mathrm{cond}_2(A)$ 与 λ_1,λ_n 之间的关系；

(2) 方程 $A\boldsymbol{x}=\lambda_1 Z_1$, $A\hat{\boldsymbol{x}}=\lambda_1 Z_1+\lambda_n Z_n$ 的解是什么？

(3) $\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|/\|\boldsymbol{x}\|=$？如果 $\mathrm{cond}_2(A)\gg1$，你能得出什么结论？

练习 5　设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 10^{-10} & 10^{-10} \\ -1 & 10^{-10} & 10^{-10} \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 2(1+10^{-10}) \\ 10^{-10} \\ 10^{-10} \end{pmatrix}$，方程组 $Ax=b$ 的解为 $x=\left(2\left(1+10^{-10}\right),\right.$ $\left.-10^{-10},10^{-10}\right)^{\mathrm{T}}$。

(1) 计算 $\mathrm{cond}_\infty(A)$。设 $E\in R^{3\times3}$，而且 $\|E\|_\infty\leqslant10^{-8}\|A\|_\infty$，验证方程 $(A+E)(x+\Delta x)=b$ 的解满足 $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\leqslant10^{-7}$；

(2) $\mathrm{cond}_\infty(DAD)=$？，这里 $D=\mathrm{diag}\left(10^{-5},10^{5},10^{5}\right)$；

(3) 本练习的结论说明了什么？

25.4 迭代法

直接法一般适合于系数矩阵 A 为低价稠密矩阵（指 n 不大且元素多为非零）情况，而在科学计算与工程设计中常会遇到大型稀疏矩阵（n 很大且零元素较多）的方程组，下面介绍的迭代法，由于它能充分避免系数矩阵中零元素的存储与计算，因此特别适合后一种情况。

解线性方程组的迭代法思路与一元方程求根的迭代法类似。首先将方程组 $Ax=b$ 转化为等

价方程组 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}$，取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$，按下述格式迭代

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f} \tag{25-21}$$

生成向量序列 $\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(k)},\cdots$，若此序列收敛于 $\boldsymbol{x}^*$（设 $\boldsymbol{x}^{(k)}=(x_1^k,x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^{\mathrm{T}}$，若 $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i^*(i=1,2,\cdots,n)$，称 $\left\{x^{(k)}\right\}$ 收敛，且称 $\boldsymbol{x}^*$ 为 $\left\{x^{(k)}\right\}$ 的极限向量），则有 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{f}$，即 $\boldsymbol{x}^*$ 为原方程组之解。因此，可根据精度要求选择一个合适的 $x^{(k)}$ 作为近似解，这就是解线性方程组的迭代法。式（25-21）称为迭代格式，M 称为迭代矩阵，若序列 $\left\{x^{(k)}\right\}$ 极限存在，称此迭代过程收敛，否则称为发散。需要讨论的问题是，如何建立迭代格式，在什么条件下迭代过程收敛，如何进行误差估计，如何加快收敛速度等。

25.4.1　雅可比（Jacobi）迭代法和高斯–赛德尔（Gauss–Seidel）迭代法

首先看一个例子，

例 1　用迭代法求解方程组

$$\begin{cases}10x_1-x_2-2x_3=7.2\\-x_1+10x_2-2x_3=8.3\\-x_1-x_2+5x_3=4.2\end{cases}$$

其精确解为 $x^*=(1.1,1.2,1.3)^{\mathrm{T}}$。

解：方程组的等价形式为

$$\begin{cases}x_1=0.1x_2+0.2x_3+0.72\\x_2=0.1x_1+0.2x_3+0.83\\x_3=0.2x_1+0.2x_2+0.84\end{cases}$$

建立迭代格式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=0.1x_2^{(k)}+0.2x_3^{(k)}+0.72\\x_2^{(k+1)}=0.1x_1^{(k)}+0.2x_3^{(k)}+0.83\\x_3^{(k+1)}=0.2x_1^{(k)}+0.2x_2^{(k)}+0.84\end{cases} \tag{25-22}$$

给定初始向量 $\boldsymbol{x}^{*(0)}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$，按上式进行迭代，得迭代序列如表 25-2 所列。

表 25-2　解的迭代序列

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	0.72	0.8300001	0.84
2	0.971	1.07	1.15
⋮	⋮	⋮	⋮
11	1.099993	1.199993	1.299991
12	1.099998	1.199998	1.299997

当 $k=12$ 时，有 $\dfrac{\left\|x^{(4)}-x^{(3)}\right\|}{\left\|x^{(4)}\right\|}<10^{-5}$，得近似解向量 $\boldsymbol{x}^{*(12)}=\left(1.099998,1.199998,1.299997\right)^{\mathrm{T}}$。我们称此迭代法为求解方程组的雅可比迭代法。

我们应当尽量利用最新信息，如计算$x_2^{(k+1)}$时，用$x_1^{(k+1)}$，而不要用$x_1^{(k)}$，计算$x_3^{(k+1)}$时，用$x_1^{(k+1)}$和$x_2^{(k+1)}$，不要用$x_1^{(k)}$和$x_2^{(k)}$等等。则迭代格式（25-22）变为

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = 0.1x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.72 \\ x_2^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k+1)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.83 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.2x_2^{(k+1)} + 0.84 \end{cases} \tag{25-23}$$

仍然用初始向量$\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$进行迭代，直到$k=8$时，满足$\dfrac{\left\|\boldsymbol{x}^{(4)} - \boldsymbol{x}^{(3)}\right\|}{\left\|\boldsymbol{x}^{(4)}\right\|} < 10^{-5}$我们称迭代格式（25-23）为求解方程组的高斯-赛德尔迭代法。

将迭代格式（25-22）推广到n阶方程组，且设$a_{ii} \neq 0, i=1,2,\cdots,n$，则有

$$x_i^{(k+1)} = \left(-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i\right) \Big/ a_{ii}, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{25-24}$$

这是雅可比迭代法的分量形式，即

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(-a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2\right) \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(-a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} + b_n\right) \end{cases}$$

从而得到雅可比迭代法的矩阵形式

$$x^{(k+1)} = BJx^{(k)} + f_J, k=0,1,2,\cdots \tag{25-25}$$

其中，

$$f_J = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix} \qquad B_J = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

若记
$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad L = -\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$U=-\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ & & \ddots & \cdots & \vdots\\ & & & 0 & a_{n-1,n}\\ & & & & 0\end{pmatrix}$$

其中 D 为对角阵，L 为严格下三角阵，U 为严格上三角阵，则 $A=D-L-U$ 。因为 $a_{ii}\neq 0$，故 D^{-1} 存在，于是有 $f_J=D^{-1}b$ 和

$$B_J=D^{-1}(L+U)=I-D^{-1}A \tag{25-26}$$

我们称式（25-25）为雅可比迭代法，B_J 称为雅可比迭代矩阵。

类似地，将迭代格式（25-23）推广到 n 阶方程组的情形，且设 $a_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,n$ ，有

$$x_i^{(k+1)}=\left(-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}+b_i\right)\Big/ a_{ii}\,,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{25-27}$$

这是高斯-赛德尔迭代法的分量形式，其矩阵表示形式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=D^{-1}\left(L\boldsymbol{x}^{(k+1)}+U\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{b}\right)$$

经整理有

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=B_{\text{G-S}}\boldsymbol{x}^{(k)}+f_{\text{G-S}},\quad k=0,1,2,\cdots \tag{25-28}$$

其中，$f_{\text{G-S}}=(D-L)^{-1}\boldsymbol{b}$ 和

$$B_{\text{G-S}}=(D-L)^{-1}U \tag{25-29}$$

我们称式（25-29）为高斯-赛德尔迭代法(简称 G-S 迭代法)，式（25-29）为高斯-赛德尔迭代矩阵。

实验 7 分别用雅可比迭代法，高斯-赛德尔迭代法解方程组。

$$\begin{cases}2x_1-x_2=1\\ -x_1+2x_2-x_3=0\\ -x_2+2x_3-x_4=1\\ -x_3+2x_4=0\end{cases}$$

迭代初值取 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，允许误差 $\varepsilon=10^{-6}$ 。

解：二种不同迭代法的迭代结果见表 25-3。

表 25-3 雅可比迭代法，G-S 迭代法的迭代结果

迭代方法	k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
雅可比迭代法	63	1.199999	1.399998	1.599998	0.7999989
G-S 迭代法	32	1.199999	1.399998	1.599999	0.7999994

实验 8 分别用雅可比迭代法和高斯-赛德尔迭代法计算下列方程组，均取相同的初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，观察其计算结果。

$$(1)\begin{cases}x_1-9x_2-10x_3=-1\\-9x_1+x_2+5x_3=0\\8x_1+7x_2+x_3=4\end{cases}\quad(2)\begin{cases}5x_1-x_2-3x_3=-1\\-x_1+2x_2+4x_3=0\\-3x_1+4x_2+15x_3=4\end{cases}\quad(3)\begin{cases}10x_1+4x_2+5x_3=-1\\4x_1+10x_2+7x_3=0\\5x_1+7x_2+10x_3=4\end{cases}$$

解：对方程组(1)，其精确解为 $\boldsymbol{x}^*\approx(-0.4511,1.2383,-1.0596)^{\mathrm{T}}$，雅可比迭代法得到 $\boldsymbol{x}^{(4)}=(-7666,7023,-3327)^{\mathrm{T}}$，高斯-赛德尔迭代法得到 $\boldsymbol{x}^{(3)}=(-10978,-92697,736077)^{\mathrm{T}}$，两种迭代法均发散。

对方程组（25-2），其精确解 $\boldsymbol{x}^*\approx(-0.0984,-1.1639,0.5547)^{\mathrm{T}}$，两种迭代法的终止条件是 $\left\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_\infty<10^{-2}$。雅可比迭代法迭代了 125 次，而 G-S 迭代法仅迭代 9 次。两种方法均收敛，但收敛速度不同，一个快，一个慢。

对方程组（25-3），其精确解为 $\boldsymbol{x}^*\approx(-0.3658,-0.5132,0.9421)^{\mathrm{T}}$，

对 Jacobi 迭代：$\boldsymbol{x}^{(299)}=(-0.35\times10^{10},-0.41\times10^{10},-0.43\times10^{10})^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{x}^{(300)}=(0.38\times10^{10},0.45\times10^{10},0.47\times10^{10})^{\mathrm{T}}$$

对 G-S 迭代：给出达到预定精度 $\left\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_\infty<10^{-3}$ 的最后两次迭代值，

$$\boldsymbol{x}^{(6)}=(-0.366,-0.541,0.943)^{\mathrm{T}}\ ,\quad \boldsymbol{x}^{(7)}=(-0.366,-0.514,0.942)^{\mathrm{T}}$$

可见，用相同迭代初值，求解同一个方程组，雅可比迭代发散，而 G-S 迭代仅用 7 次达到预定精度。

实验 9 雅可比迭代法与 G-S 迭代法的比较。

分别用雅可比迭代法与 G-S 迭代法解下列方程组：

$$(1)\begin{pmatrix}x_1+x_3+5\\-x_1+x_2=-7\\x_1+2x_2=-17\end{pmatrix}\qquad(2)\begin{pmatrix}x_1+\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{2}x_3=0\\\dfrac{1}{2}x_1+x_2+\dfrac{1}{2}x_3=0.5\\\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{2}x_2+x_3=-2.5\end{pmatrix}$$

解：取迭代初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$，迭代结果见表 25-4。

表 25-4 迭代结果

题号	雅可比迭代法	G-S 迭代法
(1)	$x^{(101)}=(1.995666,-5.002442,3.001062)^{\mathrm{T}}$，$\varepsilon=10^{-2}$	发散，$\varepsilon=10^{-6}$
(2)	发散，$\varepsilon=10^{-6}$	$x^{(17)}=(1.2,-4)^{T}$，$\varepsilon=10^{-6}$

实验 9 表明：雅可比迭代法和 G-S 迭代法可能同时发散，也可能同时收敛，但一个快，另一个慢；可能一个收敛，而另一个发散。它们的收敛范围并不重合。但是两者都收敛时，在很多情况下 G-S 迭代法确实比雅可比迭代法收敛快得多。

练习 6 设 $M=\begin{pmatrix}0.2&0.3\\0.4&0.2\end{pmatrix}$，

(1) 任意取定向量 $\boldsymbol{f}$ 及初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$，利用(25-21)式作迭代。向量序列 $\boldsymbol{x}^{(n)}$ 是否收敛?对不同的

向量f及$x^{(0)}$做同样的观察。

(2) 矩阵M的特征值是什么？M是否相似于对角阵？

(3) 你能否给出迭代向量序列$x^{(n)}$的通项公式？你能否利用通项公式解释前面观察所得出的结论？

(4) 分别取$M=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$和$M=\begin{pmatrix}0 & 0.5\\ -0.5 & 1\end{pmatrix}$，重做问题(1)，(2)，(3)。

(5) 根据以上结论，回答以下问题：

① 给出向量列$x^{(n)}$的通项公式，你能否由此给出迭代（25-21）收敛的条件？收敛速度由什么决定？

② 如果矩阵M满足$\|M\|_\infty<1$或$\|M\|_1<1$，你能否确定迭代（25-21）一定收敛？

练习 7 给定$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$，$b$任意选取，将方程组$Ax=b$改成多种等价的形式$x=Mx+f$，观察迭代是否收敛？对收敛的迭代格式，比较它们收敛速度的快慢。

练习 8 分别取$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$和$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$，回答练习 7 同样的问题。

25.4.2 迭代法的收敛条件

现在讨论一般迭代格式（25-21）收敛的条件。设x^*是原方程组$Ax=b$的准确解，则它满足等价方程组

$$x^*=Mx^*+f \tag{25-30}$$

迭代序列$\{x^{(k)}\}$满足（25-21），即

$$x^{(k+1)}=Mx^{(k)}+f \tag{25-31}$$

令$\varepsilon^{(k)}=x^{(k)}-x^*$，则$\{x^{(k)}\}$是否收敛于$x^*$等价于误差向量序列$\{\varepsilon^{(k)}\}$是否收敛于 0，
式（25-31）减去式（25-30）得

$$\varepsilon^{(k+1)}=M\varepsilon^{(k)},\quad k=0,1,\cdots$$

因此$\varepsilon^{(k)}=M\varepsilon^{(k-1)}=M^2\varepsilon^{(k-2)}=\cdots=M^{(k)}\varepsilon^{(0)}$。

因为$x^{(0)}$是任取的，$\varepsilon^{(0)}=x^{(0)}-x^*$是任意向量，因此$\varepsilon^{(k)}\to 0$的充要条件是$M^k\to 0$。

由以上分析可见，迭代格式收敛与否取决于迭代矩阵M的特性。经过严格的证明可得如下关于迭代收敛的基本定理。

定理 1 对任何初始向量$x^{(0)}$及常向量f，迭代过程$x^{(k+1)}=Mx^{(k)}+f$收敛的充分必要条件是

$$\rho(M)=\max_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|<1$$

其中$\lambda_i\,(i=1,2,\cdots,n)$为矩阵$M$的特征值。$\rho(M)$称为矩阵$M$的谱半径。

又因为矩阵的谱半径不超过它的（任一种）范数，所以若$\|M\|=q<1$，则迭代公式（25-31）收敛，且有

$$\left\|x^{(k+1)}-x^{*}\right\| \leqslant \frac{q}{1-q}\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\| \tag{25-32}$$

可见 q 越小，收敛越块。

实际上，条件 $\rho(M)<1, \|M\|=q<1$ 只能在构造出 M 以后来检验，我们更需要直接根据系数矩阵 A 来判断迭代的收敛性。常用的判断条件有

(1) 若 A 是严格对角占优的，即 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|, (i=1,\cdots,n)$，则 Jacobi 和 G-S 迭代均收敛；

(2) 若 A 对称正定，则 G-S 迭代收敛。

实验 10 停止迭代条件的局限性。

用 G-S 迭代法求解方程组 $H_4 x=b$，其中 H_4, b 的元素分别为

$$h_{ij}=\frac{1}{i+j-1} \quad , \quad b_i=\sum_{i=1}^{4} h_{ij} \quad , \quad (i,j=1,2,3,4)$$

解：方程组的准确解为 $x^{*}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，用 G-S 迭代法求解，取初值 $x^{(0)}=b$，按迭代停止的条件，$\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|_{\infty}<10^{-3}$ 时停止迭代，得

$$x^{(63)}=(0.9969761,0.9908074,1.067935,0.9389038)^{\mathrm{T}}$$

误差向量为

$$x^{*}-x^{(63)}=(0.0030239,0.0091926,-0.067935,0.061092)^{\mathrm{T}}$$

每一分量的绝对误差均大于 10^{-3}。由此可见，满足迭代终止条件是并不能保证近似解的精度也达到 ε。迭代终止条件来源于误差估计式（25-32），而式（25-32）只能保证：当 $q\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|<\varepsilon$，必有 $\left\|x^{*}-x^{(k)}\right\|<\varepsilon$；当 $\frac{1}{2}<q<1$（即收敛较慢）时，给不出 $x^{(k)}$ 精度的可靠信息。

25.5 值得进一步研究的问题

问题 1 （高斯消去法的数值稳定性实验）观察和理解高斯消元过程中出现小主元即 $\left|a_{kk}^{(k)}\right|$ 很小时，引起方程组解的数值不稳定性。设方程组 $Ax=b$，其中

$$(1)\quad A_1=\begin{pmatrix} 0.3\times10^{-15} & 59.14 & 3 & 1 \\ 5.291 & -6.130 & -1 & 2 \\ 11.2 & 9 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad b_1=\begin{pmatrix} 59.17 \\ 46.78 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad A_2=\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 1 \\ -3 & 2.09999999999999 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} , \quad b_2=\begin{pmatrix} 8 \\ 5.90000000000001 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

分别对以上两个方程组

(1) 计算矩阵的条件数，判断系数矩阵是良态的还是病态的？

(2) 用高斯选列主元消去法，求得 L 和 U 及解向量 $x_1, x_2\in R^4$；

(3) 用不选主元的高斯选列主元消去法求得 $\tilde{L},\tilde{U}$ 和解向量 $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\in R^4$；

(4) 观察小主元并分析对计算结果的影响。

问题 2 （病态线性方程组的特点）给定三个 n 阶线性方程组 $Ax=b$，其中 A 的元素 $a_{ij}(i,j=1,\cdots,n)$ 与阶数 n 分别为

(1) $a_{ij}=(i+j-1)^2$ ， $n=3,4,\cdots,9$；

(2) $a_{ij}=(i+j)^2$ ， $n=3,4,5$；

(3) $a_{ij}=\dfrac{1}{i+j-1}$， $n=3,4,5,6$。

b 的元素 $b_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,(i=1,\cdots,n)$，及其准确解为 $x=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，用选列主元法分别求解上列方程组，并输入各步主元，解释计算结果出现的异常现象。

问题 3 以希尔伯特（Hilbert）矩阵为例，研究处理病态问题可能遇到的困难。

希尔伯特矩阵的定义是

$$H_n=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1}\end{pmatrix}$$

它是一个对称正定矩阵，而且 $\mathrm{cond}(H_n)$ 随着 n 的增加迅速增加。其逆矩阵 $H_n^{-1}=(a_{i,j})$，这里

$$a_{i,j}=\frac{(-1)^{i+j}(n+i-1)!(n+j-1)!}{(i+j-1)\left[(i-1)!(j-1)!\right]^2(n-j)!(n-j)!}$$

(1) 画出 $\ln(\mathrm{cond}(H_n))\sim n$ 之间的曲线（可以用任何一种范数）。你能猜出 $\ln(\mathrm{cond}(H_n))\sim n$ 之间有何关系吗？提出你的猜测并设法验证。

(2) 设 D 是 H_n 的对角线元素开方构成的矩阵。$\hat{H}_n=D^{-1}H_nD^{-1}$，不难看出 $\hat{H}_n$ 仍然是对称矩阵，而且对角线元素都是 1。把 H_n 变成 $\hat{H}_n$ 的技术称为预处理。画出 $\ln(\mathrm{cond}(\hat{H}_n)/\mathrm{cond}(H_n))\sim n$ 之间的曲线（可用任何一种范数）。你能对于预处理得出什么印象？

(3) 对于 4≤n≤12，给定不同的右端项 b，分别用 $x_1=H_n^{-1}b,\hat{x}=\hat{H}_n^{-1}D^{-1}b,x_2=D^{-1}\hat{x}$ 求解 $H_nx=b$，比较计算结果。

(4) 取不同的 n 并以 H_n 的第一列为右端项向量 b，用 G-S 迭代法求解 $H_nx=b$，观察其收敛性。最后你能对于有关希尔伯特矩阵的计算得出哪些结论？

问题 4 探索高斯选主元消去法增长因子的规律。设 $A\in R^{n\times n}$，而且 $\max\limits_{i,j}\left|a_{i,j}\right|=1$。利用高斯选主元消去法对其完成消去过程，令 $\rho(A,n)=\max\limits_{i,j,k}\left|a_{i,j}^{(k)}\right|$，这里 $a_{i,j}^{(k)}$ 是消去过程中 $A^{(k)}$ 的第 (i,j) 个

元素。首先固定 $n(5\leqslant n\leqslant 10)$，选择 $k(>30)$ 个随机矩阵，计算每个 $\rho(A,n)$，然后选出其中最大的一个，记之为 $\rho(n)$，它被成为近似的增长因子。画出 $\rho(n)\sim n$ 之间的关系曲线，能不能提出你对它们之间关系的猜测？

问题 5 （迭代法收敛速度实验）用迭代法求解方程组 $Ax=b$，其 $A\in R^{20\times 20}$，它的每条对角元素是常数，为

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & & & \\ -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & & \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{4} \\ & & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ & & & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 选取不同的初始向量 $x^{(0)}$ 和不同的方程组右端项向量 b，给定迭代误差要求，用雅可比迭代法和 G-S 迭代法计算，观测得到的迭代向量序列是否均收敛，记录迭代次数，分析计算结果并得出你的结论；

(2) 取定右端项向量 b 和初始向量 $x^{(0)}$，将 A 的主对角线元素成倍增长若干次，非主对角线元素不变，每次用雅可比迭代法计算，要求迭代误差满足 $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|_{\infty}<10^{-5}$，比较收敛速度，分析现象并得出你的结论。

问题 6 （雅可比迭代法与 G-S 迭代法的收敛性）研究用雅可比迭代法和 G-S 迭代法解下列方程组 $Ax=b$ 的收敛性，验证分析是否正确，并观察右端项对迭代收敛是否有影响。

(1) $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，$b_1=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$，$b_2=\begin{pmatrix} 100 \\ -200 \\ 345 \end{pmatrix}$；

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}$，$b_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$b_2=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

实验二十六　数值积分与数值微分

积分与微分是在高等数学中学过的最基本的运算之一。一方面它们是非常重要的数学工具，如概率论基础；另一方面它们在实际问题中也有许多直接的应用。

在高等数学中，仅对简单的或特殊的情况提供了函数的积分的解析表达式。如对函数在$[a,b]$上的积分，理论上可以使用牛顿－莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

计算。只要能找到$f(x)$的原函数$F(x)$，问题就迎刃而解了。但对很多实际问题这种解析的方法已经无能为力了，常常会遇到如下的困难。

(1) 找不到被积函数的原函数$F(x)$，如：

$$f(x)=1/\ln x\,,\quad f(x)=\sin x/x\,,\quad f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\,,\quad f(x)=1/(1-k^2(\sin x)^2)$$

(2) 虽然找到了原函数，但它比被积函数复杂得多，而且有时难以给出最后的数值结果。如在积分表中可以查到不定积分的解析式

$$\int\frac{x^2}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{1+x^4}}{1-x^2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{1+x^2}+C$$

当积分限为$x=\pm1$时，原函数中第1项无定义，得不到定积分值。

(3) 除一些特殊的无穷积分外，通常很难求无穷积分的值。

(4) 被积函数没有有限的解析表达式，而以表格的形式给出。

鉴于以上情况，采用数值的方法计算定积分就很有必要且很有效。对于积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{26-1}$$

所谓用数值方法求定积分值，就是用被积函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一些节点x_k处的函数值$f(x_k)$的线性组合

$$I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$$

去近似$I(f)$。其中x_k为求积节点，A_k为相应的求积系数，$I_n(f)$为近似求积公式。一旦x_k,A_k确定，则近似求积公式I_n也就确定了。

26.1　数值积分法

数值积分法，是从近似计算的角度，采用某种数值过程来求出定积分的近似值。

我们知道定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，但积分区间(a,b)是有限区间，被积函数$f(x)$是(a,b)上的有界函数时，在几何上可以解释为在$x=a$和$x=b$之间函数$f(x)$图形下的面积。我们用一系列分点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$将区间$(a,b)$分成几个小区间：$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots[x_{n-1},x_n]$，并且在各小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点$\xi_i$，设相应的函数值为$f(\xi_i)$，于是得到一组以$h_i=x_i-x_{i-1}$为底，

以 $f(\xi_i)$ 为高的矩形，其面积为 $h_i f(\xi_i)$。然后我们将这些面积相加起来，便得到和式 $I_n=\sum_{i=1}^{n}h_i f(\xi_i)$。

设 h 是 n 个小区间中的最大长度 $h=\max_i\{h_i\}$。如果对于区间的任何一种分法和 ξ_i 的任何一种选择，当分点无限增多且 $h\to 0$ 时，存在共同的极限 $\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}h_i f(\xi_i)=I$，则此极限即是定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

从定积分的定义中，我们显然可以得到一种近似的计算法。例如，我们可以取分点 x_i 为区间 (a,b) 的 n 个等分点：$x_i=a+ih(h=\frac{b-a}{n})$，并取 ξ_i 为各小区间的两端点之一，或者取 ξ_i 为小区间的中点，那么就得到矩形积分公式（或称为原始积分公式）

$$I_n=h\sum_{i=0}^{n-1}f(a+ih) \tag{26-2}$$

$$I_n=h\sum_{i=1}^{n}f(a+ih) \tag{26-3}$$

$$I_n=h\sum_{i=1}^{n}f(a+(i+\frac{1}{2})h) \tag{26-4}$$

其中公式（26-3）又称为中点积分公式。

如果我们不用矩形而改用梯形，那么我们就可以得到定积分的一个较好的近似——梯形积分公式

$$I_n=\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})+f(x_i)]$$

总之，各种各样的数值积分法都是利用被积函数的一种线性组合来近似积分，即

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}w_i f(x_i)\approx\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{26-5}$$

如上所述，数值积分法是用一有限项的求和计算来代替积分计算，这之间就存在一定的误差。这误差来源于如下两个方面：

(1) 产生于用有限项之和来等于积分的近似值中，这时

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I_n+E=\sum_{i=1}^{n}w_i f(x_i)+E \tag{26-6}$$

这个误差 E 称为截断误差；

(2) 产生于我们在计算和式 $I_n=\sum_{i=1}^{n}w_i f(x_i)$ 时是近似计算，而非精确计算。

$$I_n=I_n^*+R=\sum_{i=1}^{n}w_i^* f^*(x_i)+R$$

这个误差 R 称为舍入误差。

因此，总的误差是 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-I_n^*=E+R$。

对于一种数值积分法，我们有必要具体地分析它的误差。在本实验中，我们只讨论截断误差。

26.2 梯形求积公式

在实验五和 26.1 中提到过这个方法，在此我们具体地推导它的求积公式，并分析它的截断误差。

26.2.1 梯形求积公式

对于定积分（26–1），我们用一系列等分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$（也可以不是等分点，但其方法原则一样），将区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, …, $[x_{n-1},x_n]$ 每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度 $h=(b-a)/n$，分点的坐标为 $x_i = a+ih \quad (i=0,1,\cdots,n)$。

在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上，我们用通过点 $(x_{i-1},f(x_{i-1}))$, $(x_i,f(x_i))$ 的直线来近似函数的弧线，即

$$P_1(x) \equiv f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x-x_{i-1}) \approx f(x) \quad (x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i) \tag{26-7}$$

且以此梯形面积来近似小区间上的积分。不难求出这个梯形面积为

$$T_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_1(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}h$$

以此作为小区间上积分的近似值

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] \tag{26-8}$$

这就是梯形的公式。

又 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x$，因此，将这些小区间上积分的梯形近似相加起来，便得到熟知的梯形求积公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+(n-1)h) + \frac{f(b)}{2}] \tag{26-9}$$

即

$$T_n = h\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + \frac{h}{2}[f(a)+f(b)], \quad h = \frac{b-a}{n} \tag{26-10}$$

26.2.2 误差估计和收敛性

如果$f(x)$ 是线性函数或者是顶点在 $(x_i,f(x_i))$ 处的分段线性函数，则$f(x)$是与结点在 x_{i-1}, x_i 处的线性插值多项式一致，此即 $f(x)-P_1(x)\equiv 0$，于是其截断误差

$$E = \int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-P_1(x)]\,\mathrm{d}x = 0$$

故梯形求积公式对线性函数（即一次多项式）是精确的。

对于非线性函数$f(x)$，梯形公式在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上是用线性插值函数 $T(x)$ 代替 $f(x)$。容易得到 $f(x)=T(x)+\frac{f''(\xi_{i-1})}{2}(x-x_{i-1})(x-x_i)$, $\xi_{i-1}\in(x_{i-1},x_i)$，则

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(k)-T(x)]\,\mathrm{d}x = \frac{f''(\xi_{i-1})}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})(x-x_i)\,\mathrm{d}x = -\frac{h^3}{12}f''(\xi_{i-1})$$

梯形求积公式（26-10）的误差可用

$$R(f,T_n)=|I-T_n|=|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-T_n| \tag{26-11}$$

给出。显然

$$R(f,T_n)\leqslant\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n}|f''(\xi_{i-1})|$$

记$M=\max\limits_{x\in(a,b)}|f''(x)|$，它常可以粗略地估出。又$h=\frac{b-a}{n}$，于是

$$R(f,T_n)\leqslant\frac{h^2}{12}M_2(b-a) \tag{26-12}$$

（26-12）式表明，梯形公式（26-10）的误差是与h^2同阶的。若$f\in C^2(a,b)$，由（26-11），（26-12）式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I-T_n}{h^2}=C$$

其中C为非零常数。

实验1 用梯形公式计算积分$I=\int_{0.6}^{1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$。取4位有效数字。

解：由梯形公式得

$$I\approx T=\frac{1-0.6}{2}[\frac{1}{1+0.6^2}+\frac{1}{1+1^2}]=0.2470588。$$

26.3 辛普森（Simpson）公式

梯形求积公式的基本思想是：在每个小区间上采用线性函数近似被积函数$f(x)$。如果我们不用线性函数而改用二次多项式来近似$f(x)$，那么就可以得到在实际计算中常用的辛普森求积公式。

用分点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{2n-1}<x_{2n}=b$将区间$[a,b]$分成$2n$等份，每个子区间长$\Delta x=\frac{b-a}{2n}$，直线$x=x_i(i=0,1,2,\cdots,2n)$与曲线$y=f(x)$的交点分别为$f(x_i)$。

现将过$f(x_{i-1}),f(x_i),f(x_{i+1}),(i=1,2,\cdots,2n-1)$，三点的曲线段用过此三点的二次多项式$y=a_ix^2+b_ix+c_i$来近似，然后计算二次多项式梯形的面积$A_i$。注意到，如果$y$轴平移，二次多项式梯形的面积是不会改变的。

故不妨设$x_i=0$，并令$h=\frac{b-a}{2n}$，则

$$A_i=\int_{-h}^{h}(a_ix^2+b_ix+c_i)\mathrm{d}x=2\int_0^h(a_ix^2+c_i)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{h}{3}(2a_ih^2+6c_i)$$

又$f(x_{i-1})=a_ih^2-b_ih+c_i,f(x_i)=c_i,f(x_{i+1})=a_ih^2+b_ih+c_i$，故

$$f(x_{i-1})+f(x_{i+1})=2a_ih^2+2c_i$$

于是

$$A_i=\frac{h}{3}[f(x_{i-1})+f(x_{i+1})+4f(x_i)]$$

$$=\frac{b-a}{6n}[f(x_{i-1})+f(x_{i+1})+4f(x_i)]$$

则

$$S_n=\sum_{i=1}^{2n-1}A_i=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+4\sum_{k=1}^{n}f(x_{2k-1})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_{2k})],h=\frac{b-a}{2n} \tag{26-13}$$

式（26-13）称为辛普森公式，也称为抛物线公式。

类似地可以求出辛普森公式（26-13）的误差$R(f,S_n)$为

$$R(f,S_n)=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-S_n\right|=\left|\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi)\right|,\quad \xi\in(a,b)$$

即有

$$R(f,S_n)\leqslant\frac{h^4}{180}M_4(b-a) \tag{26-14}$$

其中$M_4=\max\limits_{x\in(a,b)}|f^{(4)}(x)|$。由（26-14）式，不难得出辛普森公式对于最高次数为 3 的多项式是精确的，且误差是与h^4同阶的。

实验 2 分别用梯形公式和辛普森公式计算积分$I=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$，取 4 位有效数字。

解：分别用梯形公式和辛普森公式计算，计算结果见表 26-1。

表 26-1 计算结果

n	2	4	8	16	32	64	128	256
T_n	17.3893	13.1160	12.3822	12.1480	12.0897	12.0752	12.0716	12.0706
S_n	11.5298	11.9849	12.0642	12.0700	12.0703	12.0703	12.0703	12.0703

积分的精确值为$I=12.0703$。可以看出，辛普森公式明显优于梯形公式；若要求$\varepsilon=10^{-4}$，则对于辛普森公式，$n=64$即可终止计算，而梯形公式$n=256$仍未达到要求。

26.4 高斯（Gauss）求积公式

26.4.1 求积公式的代数精确度

从前面的梯形求积公式和辛普森公式，我们可以看到，这两个近似求积公式都可以写成$I_n=\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k)$其中，$A_k$是与函数$f(x)$无关的常数，梯形公式和辛普森公式的区别仅在于$A_k$的取值不同，它们分别对于一次多项式和不超过三次的多项式精确成立。

代数精确度是衡量求积公式精确度的一种指标，它用幂函数作为被积函数$f(x)$，以近似积分与精确值是否相等作为精确度的度量标准，有如下定义：

定义 设$f(x)=x^k$，用（26-15）式计算$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，若对于$k=0,1,\cdots,m$都有$I_n=I$，而当$k=m+1$时$I_n\neq I$，则称$I_n$的代数精确度为$m$。

容易验证，梯形公式（26-10）的代数精确度$m=1$，辛普森公式（26-13）的代数精确度$m=3$。

前面几种求积公式的共同点是将积分区间等分，将分点作为插值节点，用分段插值多项式代替$f(x)$作积分，因而节点数n给定后，节点$x_k(k=1,2,\cdots,n)$是固定的，要构造求积公式只需确定（26-15）式中的系数A_k即可。这样做虽然简单，但代数精确度较低。下面介绍的方法取

消区间等分的限制，n 给定后同时确定节点 x_k 和系数 A_k，使代数精确度尽量高。

26.4.2　高斯公式

对于 $n=2$ 的情况，因为只有 2 个节点，所以按照固定节点的办法只能用梯形公式，代数精度为 1。

例 1　在 $[-1,1]$ 上构造的求积公式

$$I_1[f]=A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$$

解：取 $x_0=-1,\ x_1=1, A_0=A_1=1$，即得

$$I_1[f]=f(-1)+f(1)$$

容易验证，它具有 1 次代数精度。

而用下面的方法在区间内适当地选择节点，就可以得到代数精度为 3 的公式。

区间 $[a,b]$ 经过适当的变量代换可以化为 $[-1,1]$，因而只需计算 $I=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$。要构造形如

$$I_2[f]=A_1f(x_1)+A_2f(x_2)$$

的求积公式，确定 x_1,x_2,A_1,A_2 使 I_2 的代数精度为 3。按照代数精度的定义，要求对于 $f(x)=1,x,x^2,x^3$ 有

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=A_1f(x_1)+A_2f(x_2) \tag{26-15}$$

成立。将 $f(x)$ 代入计算可得

$$\begin{cases}A_1+A_2=2\\A_1x_1+A_2x_2=0\\A_1x_1^2+A_2x_2^2=\dfrac{2}{3}\\A_1x_1^3+A_2x_2^3=0\end{cases} \tag{26-16}$$

解出 $x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{3}},x_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}},A_1=A_2=1$，即得 $n=2$ 的高斯公式

$$G_2=f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}}) \tag{26-17}$$

进一步提高精度有两条途径，一是增加 n，可以证明，$G_n=\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k)$ 的代数精度可达 $2n-1$，但是要求解形如（26-16）式的更复杂的非线性方程组，n 较大时实用性不大；二是先将区间 (a,b) 分小，在小区间上用 G_2，具体步骤如下：

将区间 (a,b) m 等分，记 $h=\dfrac{b-a}{m}$，$x_k=a+kh,k=0,1,\cdots,m$ 作变换 $x=\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}+\dfrac{h}{2}t$，则 $I_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{h}{2}\int_{-1}^{1}f(\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}+\dfrac{h}{2}t)\,\mathrm{d}t$，用 G_2 近似 I_k，就有

$$I_k\approx\frac{h}{2}[f(x_k^{(1)})+f(x_k^{(2)})]$$

其中

$$x_k^{(1)}=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}+\frac{h}{2\sqrt{3}}$$
$$x_k^{(2)}=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}-\frac{h}{2\sqrt{3}} \tag{26-18}$$

于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{m}[f(x_k^{(1)})+f(x_k^{(2)})] \tag{26-19}$$

其中，$x_k^{(1)},x_k^{(2)}$ 如（26-18）式所示。（26-19）式即为常用的高斯求积公式。

实验 3 数值积分的收敛速度的比较。分别按下述计算方案求积分 $I=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$ 的近似值，并比较其收敛速度。

方案 I 梯形法；方案 II 辛普森法；方案 III 高斯公式。

解：显而易见，被积函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$ 在积分区间 $[0,\pi]$ 上是十分光滑的。对于这样的积分可以期望复化梯形法，复化辛普森法和高斯公式的收敛的速度一个比一个快，数值计算结果见表 26-2，其数据很明显地表明了这一点。

表 26-2 数值计算结果

节点数 $n+1$	复化梯形法 T_n	复化辛普森法 $S_{n/2}$	高斯公式
2+1	-17.389259	-11.59283955	-12.12742045
4+1	-13.336023	-11.98494402	-12.07032854
8+1	-12.382162	-12.06420896	-12.07034632
16+1	-12.248004	-12.06995132	
32+1	-12.089742	-12.07032146	
64+1	-12.075194	-12.07034476	
128+1	-12.071558	-12.07034621	
256+1	-12.070649	-12.07034631	
512+1	-12.070422		

事实上，积分的准确值为 $I=-\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{\pi})=-12.0703346316\cdots$。与之相比可知，梯形值 T_{512} 只有 5 位有效数字；辛普森值 S_{128} 则已有 9 位有效数字。

但是，数值结果同时表明，收敛速度最快的是高斯求积法。仅用七个节点的高斯公式，计算结果已经具有 10 位有效数字了。

练习 1 数值积分方法的使用和比较。对给定的积分

(1) $I=\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$；(2) $I=\int_0^3 x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$；(3) $I=\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x$

分别用下述方案计算求积分值，要求误差不超过 10^{-6}。比较收敛的速度，并讨论或说明原因。

方案 I 梯形法；方案 II 辛普森法；方案 III 高斯公式。

实验 4 被积函数的不光滑性对数值积分的影响。用实验 3 中所列的三种方案求下述积分的值，并观察其收敛速度。

$$I=\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

解：为了便于比较，首先给出积分的准确值$I=\int_0^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=2/3$。

由于该积分的被积函数$f(x)=\sqrt{x}$在$x=0$处的导数不存在，因此其光滑性远没有实验 3 中的函数的性态好，其数值积分的收敛速度还同实验 3 中的情况一样吗？表 26-3 中给出了各种方案数值积分结果的误差情况，其中“比率”是指当n加倍时，误差减少的速率，即前后两次误差的比值。

表 26-3　各种方案数值积分结果的误差情况

n	复化梯形法		复化辛普森法		高斯公式	
	误差	比率	误差	比率	误差	比率
2	6.311×10^{-2}		2.860×10^{-2}		-7.22×10^{-3}	
		2.70		2.82		6.2
4	2.338×10^{-2}		1.012×10^{-2}		-1.16×10^{-3}	
		2.74		2.83		6.9
8	8.53311×10^{-2}		3.587×10^{-2}		-1.69×10^{-4}	
		2.77		2.83		7.4
16	3.085×10^{-3}		1.268×10^{-3}		-2.30×10^{-5}	
		2.78		2.83		7.6
32	1.108×10^{-3}		4.485×10^{-4}		-3.00×10^{-6}	
		2.80		2.83		7.8
64	3.959×10^{-4}		1.586×10^{-4}		-3.84×10^{-7}	
		2.81		2.83		7.9
128	1.410×10^{-4}		5.606×10^{-5}		-4.85×10^{-8}	

从表 26-3 中结果可以看到，不论是从误差情况看，还是从误差下降率来看，复化梯形法和复化辛普森法并非像实验 3 中那种明显地提高收敛速度。对于某些情况，甚至收敛速度反而更慢。

从以上数值结果还可以看到，高斯公式明显比前两种方法的收敛速度快，有效地处理了光滑性较差函数的积分。但应注意，计算中所有奇异性态的点应当作为积分区间的端点出现。例如,高斯公式对于积分区间内部包含奇异点的积分，如

$$I=\int_0^1\sqrt{|x-0.7|}\,\mathrm{d}x$$

效果是非常差的。应当指出，大多数其它数值积分法也是很差的。这时，积分应按下列形式分解

$$I=\int_0^{0.7}\sqrt{0.7-x}\,\mathrm{d}x+\int_{0.7}^1\sqrt{x-0.7}\,\mathrm{d}x$$

然后，再利用高斯公式求值。

实验 5　待定系数法构造高斯公式。构造下列形式的高斯求值公式

$$\int_0^1\sqrt{x}f(x)\,\mathrm{d}x\approx A_1f(x_1)+A_2f(x_2) \tag{26-20}$$

并利用该公式求下列积分的值

$$I=\int_0^1 x^{9/2}\,\mathrm{d}x \tag{26-21}$$

解：积分式$\int_0^1\sqrt{x}f(x)\,\mathrm{d}x$中函数$\sqrt{x}$叫做该积分的权函数。对于一般的权函数，构造高斯公式的方法可用待定系数法。令式（26-20）对$f(x)=1,x,x^2,x^3$都准确成立，得下列关系式：

$$\begin{cases}A_1+A_2=2/3\\A_1x_1+A_2x_2=2/5\\A_1x_1^2+A_2x_2^2=2/7\\A_1x_1^3+A_2x_2^3=2/9\end{cases}$$

求解此非线性方程组有 $x_1x_2=\dfrac{5}{21}, x_1+x_2=\dfrac{10}{9}$。从而可得

$$x_1=0.289949\ ,\quad x_2=0.821162\ ,\quad A_1=0.277556,\quad A_2=0.389111$$

于是，所求高斯公式为

$$\int_0^1\sqrt{x}f(x)\,\mathrm{d}x\approx 0.277556f(0.289949)+0.389111f(0.821162) \tag{26-22}$$

由上述过程可见，利用待定系数法构造高斯公式时，遇到的最大困难，是要求解非线性方程组。

利用公式（26-22）可得积分式（26-21）的近似值为

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 x^{9/2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{x}x^4\,\mathrm{d}x\\&\approx 0.277556\times(0.289949)^4+0.389111\times(0.821162)^4\\&=0.178887\end{aligned}$$

与积分准确值 I=2/11 相比，具有 2 位有效数字，比辛普生公式（3 个节点）的计算值 $S=0.196129$ 的精度高。

练习 2 复化求积公式计算定积分。数值计算下列各式右端定积分的近似值。

(1) $\ln 2=-2\int_2^3\dfrac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$ (2) $\pi=4\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(3) $\dfrac{2}{\ln 3}=\int_0^1 3^x\,\mathrm{d}x$ (4) $\mathrm{e}^2=\int_1^2 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

实验要求：

(1) 复化梯形公式、复化辛普森公式和高斯公式作计算，要求绝对误差限为 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}\times10^{-7}$，分别利用他们的余项对每种算法作出步长的事前估计。

(2) 分别用复化梯形公式、复化辛普森公式和高斯公式作计算。

(3) 将计算结果与精确解作比较、并比较各种算法的计算量。

练习 3 卫星轨道是一个椭圆，其周长的计算公式是

$$S=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-(\frac{c}{a})^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

式中，a 是椭圆的半长轴，$a=(2R+H+h)/2$；c 是地球中心与轨道中（椭圆中心）的距离，$c=(H-h)/2$，其中 h 为近地点距离，H 为远地点距离；地球半径 $R=6371\mathrm{km}$。

我国第一颗人造地球卫星近地点距离 $h=439\,\mathrm{km}$，远地点距离 $H=2384\,\mathrm{km}$。试分别按下列方案计算卫星轨道的周长，误差限取为 10^{-6}。

方案Ⅰ 辛普森法； 方案Ⅱ 高斯公式。

练习 4 在电磁场理论中已经证明，在圆形的导线回路中流动的电流所产生的磁场强度为

$$H(x)=\frac{4Ir}{r^2-x^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

其中，I 是电流，r 是回路的半径，x 是从中心到计算磁场强度的那个点的距离($0\leqslant x\leqslant r$)。

现设 $I=15.3, r=120$，试分别利用练习 3 中的两种方案求 $x=84$ 处的磁场强度，误差限取为 10^{-7}。

练习 5 利用下面的积分式：

(1) $\pi=4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　（2）$\ln 2=\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x$。

分别利用练习 3 中的计算方案求圆周率π和$\ln 2$的近似值，误差限取为10^{-6}。

26.5　蒙特卡罗方法

蒙特卡罗方法是一种随机试验方法，用它计算定积分的原理可以从下面的例子得出：

图 26-1 中给出四分之一单位圆,如果向图中边长为 1 的正方形里随机投 n 块小石头，当 n 很大时小石头会均匀分布在正方形中,计算落在四分之一圆里的小石头,假定有 m 个，那么 $\frac{m}{n}$ 就能看作四分之一单位圆面积$\frac{\pi}{4}$的近似值，于是有$\pi\approx\frac{4m}{n}$，显然这可作为近似计算π的一种方法,将在实验三十中介绍。

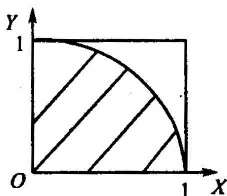


图 26-1　蒙特卡罗法

26.5.1　随机投点法

从概率论的观点看上例，设投点的坐标为$(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n$，每个坐标视为相互独立的(0,1)区间内均匀分布的随机变量，简称(0,1)随机数。每个点落在四分之一圆内的概率$P\{y_i\leqslant\sqrt{1-x_i^2}\}=\frac{\pi}{4}$（四分之一单位圆的面积）。根据大数定律，随机事件“(x_i,y_i)落在四分之一单位圆内”发生的频率$\frac{m}{n}$(依概率)收敛于该事件发生的概率$p(n\to\infty)$，记作$p\approx\frac{m}{n}$，而 p 可以用积分表示为

$$p=\{y<f(x)\}=\int_0^1\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x, f(x)=\sqrt{1-x^2}$$

于是当$0\leqslant\sqrt{1-x^2}\leqslant 1$，可以随机投点法作近似计算

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{m}{n}\tag{26-23}$$

这里 n 是（二维）(0,1)随机数(x_i,y_i)的总数，m 是其中满足$y_i\leqslant f(x_i)$的点数。

26.5.2　均值估计法

均值估计法依据概率论中关于随机变量函数的性质：若随机变量 X 概率分布密度 $p(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$，则随机变量函数 $y=f(x)$ 的数学期望为

$$E(f(x))=\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x\tag{26-24}$$

特别地，当 X 为(0,1)区间均匀分布的随机变量时，$p(x)$=1,($a\leqslant x\leqslant b$)，(26-24)式给出

$$E(f(x))=\int_0^1 f(x)\,dx \tag{26-25}$$

只要产生 (0,1) 随机数 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，当 n 很大时，期望 $E(f(x))$ 就可以用 $f(x_i)$ 的平均值近似，所以由（26-25）式得到

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \tag{26-26}$$

与随机投点法的(26-20)式相比，(26-26)式设有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ 的限制，只需计算 $f(x_i)$，不需要产生随机数 y_i 和作 $y_i\leqslant f(x_i)$ 的比较，显然较为方便。

以上两种方法称随机模拟，或蒙特卡罗方法，当用这两种方法计算任意区间 (a,b) 上的积分 $I=\int_a^b f(x)\,dx$ 时，要先作变量代换 $x=a+(b-a)u$，将其化为 (0,1) 区间上的积分，有

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)u)\,du \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+(b-a)u_i) \tag{26-27}$$

其中 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 (0,1) 区间的随机数。

26.6 重积分的计算

考虑二重积分

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

此处积分域 D 是平面上的一个有界区域。常见的有如下 2 种区域：

(1) $a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d$；(2) $a\leqslant x\leqslant b,\ c(x)\leqslant y\leqslant d(x)$。

这里 $c(x)$ 和 $d(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，且有 $c(x)\leqslant d(x)$。

对于任何简单的平面有界区域，总可以通过区域的适当分解，化为若干个这样区域的和，因此我们只讨论二重积分

$$I=\int_a^b\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dx\,dy \tag{26-28}$$

这里 $c(x)$ 和 $d(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $f(x,y)$ 在积分区域上是连续的。记

$$g(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy$$

对于任何给定的 x 值，这是一个重积分。因此函数 $g(x)$ 是有定义的，且根据 $c(x)$、$d(x)$ 及 $f(x,y)$ 的连续性，$g(x)$ 也是连续的，于是积分 $I=\int_a^b g(x)\,dx$ 存在。因此，可以将二重积分(26-28)化为累次积分

$$I=\int_a^b\left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\right]dx \tag{26-29}$$

将一个多重积分化为累次积分后，前面介绍的求定积分的数值积分法都可以用来求一多重积分，可以得到积分近似式

$$I\approx\sum_{i=1}^{n} w_i\sum_{j=1}^{m_i} v_{ij} f(x_i,y_j) \tag{26-30}$$

对于三重积分的累次积分法亦是类似的，但累次积分法仅适用于低重积分。

练习 6 设计一个数值积分方法计算

$$I=\int_1^{\infty} x^{-2}\,dx$$

提示：这是一个奇异积分，可以用下列方法尝试：

(1) $I \approx \int_1^A x^{-2} \mathrm{d}x$，只要 $A \gg 1$；

(2) 令 $y = x^{-2}$ 把积分变成另外的形式，再用数值方法计算；

(3) 直接在 $[0,\infty]$ 上建立高斯型积分公式。

练习 7 试建立计算多重积分的蒙特卡罗方法，并研究蒙特卡罗算法的计算过程和数值性质。取不同的 $N = 100, 500, 1000, \cdots$，用蒙特卡罗算法计算

$$I = \iint_D \mathrm{e}^{-(x+y)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \quad D = [1,2] \times [2,3]$$

对于每一个 N，计算 l 次，计算出 l 个结果的均方差 $\sigma(N)$，画出 $\sigma(N) \sim N$ 之间的曲线。

26.7 数值微分

在微分学里，求函数 $f(x_0)$ 的导数 $f'(x_0)$ 一般来讲容易办到，但若所给的函数 $f(x_0)$ 由表格形式给出，则求 $f'(x_0)$ 就不那么容易了，这种对列表函数求导数通常称为数值微分。

26.7.1 用差商代导数

根据微积分中的定义，导数 $f(x_0)$ 是差商 $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 当 $h \to 0$ 时的极限。如果精度要求不高，可以简单地取差商作为导数的近似值，即

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{26-31}$$

类似地，亦可以用向后差商和中心差商作近似的计算

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} \tag{26-32}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \triangleq G(h) \tag{26-33}$$

(26-33)式又称为中点公式，是前两种方法的算术平均值。在图 26-2 中，这三种差商分别表示弦 AB、AC 和 BC 的斜率，而导数 $f'(x_0)$ 为曲线在点 A 处的切线 AT 的斜率。

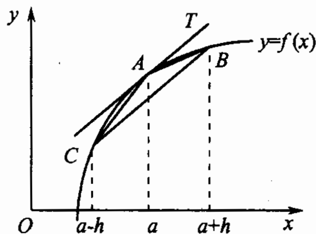


图 26-2 数值微分公式的几何意义

将三条弦与切线 AT 比较可见，BC 的斜率更接近于 AT 的斜率。因此，就精度而言，中点公式更可取。事实上，由泰勒公式容易得到公式(26-31)、(26-32)、(26-33)的截断误差分别为 $-\dfrac{h}{2}f''(\xi)$，$\dfrac{h}{2}f''(\xi)$，$-\dfrac{h^2}{6}f'''(\xi)$。一般地，根据差商与导数的关系，

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

还可建立其它的数值微分公式。例如

$$f'(x_0)\approx 2!f[x_0-h,x_0,x_0+h]=\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$$

上述各公式从收敛性角度来看，步长越小，精度越高。但从计算的观点看，h 很小时，将出现相近的数相减和接近于零的数作除数，使舍入误差增大。因此，使用这些公式时，应在保证满足精度的前提下，步长尽可能选取大些。或者根据具体情况，将公式变形，以避免上述问题发生。

26.7.2 利用插值多项式求导数

设 $y=p_n(x)$ 为由函数 $y=f(x)$ 的离散数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 构造的 n 次插值多项式。以 $p_n(x)$ 近似表示 $f(x)$，可建立公式

$$f'(x)\approx p_n'(x) \tag{26-34}$$

这样的公式统称为插值型求导公式。

$p_n'(x)$ 的截断误差可由 $p_n(x)$ 的截断误差求导数得到。因为

$$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_{n+1}(x)\quad,\quad \xi\in(a,b)$$

其中，$w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_i)\cdots(x-x_n)$。于是 $p_n'(x)$ 的截断误差为

$$f'(x)-p_n'(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_{n+1}'(x)+\frac{w_{n+1}(x)}{(n+1)!}\frac{d}{dx}f^{(n+1)}(\xi) \tag{26-35}$$

在这一余项公式中，由于 ξ 是 x 的未知函数，当 x 为非插值节点时，无法对它的第二项作出进一步的分析。 因此，误差 $f'(x)-p_n'(x)$ 是难以预估的。但是，当 $x=x_k$ 为节点时，上式的第二项为零，这时有余项公式

$$f'(x_k)-p_n'(x_k)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_{n+1}'(x_k) \tag{26-36}$$

由于以上原因，以下仅考察节点处的导数值。为简化讨论，假定所给节点是等距的。设已给出 $f(x)$在两个节点 $x_0,x_1=x_0+h$ 上的函数值，作线性插值

$$p_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)$$

对上式两端求导，则有两点公式

$$\begin{aligned}f'(x_0)\approx p_1'(x_0)=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]\\ f'(x_1)\approx p_1'(x_1)=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]\end{aligned} \tag{26-37}$$

由式(26-36)知，其余项分别为 $-\frac{h}{2}f''(\xi)$ 和 $\frac{h}{2}f''(\xi)$。

同样，利用点 $x_0,x_1=x_0+h,x_2=x_0+2h$ 上作二次插值

$p_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$ 为求导方便，令 $x=x_0+th$ 且 $x_1=x_0+h$， $x_2=x_0+2h$ 于是上式可表示为

$$p_2(x_0+th)=\frac{1}{2}(t-1)(t-2)f(x_0)-t(t-2)f(x_1)+\frac{1}{2}t(t-1)f(x_2)$$

两端对 t 求导，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p_2(x_0+th)\frac{\mathrm{d}(x_0+th)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}[(2t-3)f(x_0)-(4t-4)f(x_1)+(2t-1)f(x_2)]$$

$$p_2'(x+th)=\frac{1}{2h}[(2t-3)f(x_0)-(4t-4)f(x_1)+(2t-1)f(x_2)]$$

当分别取 $t=0,1,2$ 时，得到在三个节点上的求导公式

$$\begin{aligned}f'(x_0)&\approx\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]\\ f'(x_1)&\approx\frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)]\\ f'(x_2)&\approx\frac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)]\end{aligned}\tag{26-38}$$

其余项分别为 $\frac{h^2}{3}f'''(\xi)$、$-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$ 和 $\frac{h^2}{3}f'''(\xi)$。

利用插值多项式 $p_n(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似函数，还可以建立高阶数值微分公式

$$f^{(k)}(x)\approx p_n^{(k)}(x)\tag{26-39}$$

例如，利用 $p_2(x)$ 可得二阶三点公式

$$f''(x_1)\approx\frac{1}{h^2}[f(x_1-h)-2f(x_1)+f(x_1+h)]$$

必须指出，即使 $f(x)$ 与 $p_n(x)$ 的值相差不多，其导数 $f^{(k)}(x)$ 与 $p_n^{(k)}(x)$ 仍然可能相差很大。因此，在使用插值型求导公式时要特别注意误差分析。

■ 利用数值积分方法求解

$$\begin{cases}y''(x)+y'(x)+xy(x)=0\\ y(0)=1,y(1)=0\end{cases}$$

解：把区间 $[0,1]$ 分成 $N+1$ 份，记 $x_k=kh,k=1,\cdots,N+1,h=1/(N+1)$. 在结点 $x_k=kh,k=1,\cdots,N$ 处分别用

$$f'(x_k)=\frac{f(x_{k+1})-f(x_{k-1})}{2h}+O(h^2)\tag{26-40}$$

$$f''(x_k)=\frac{f(x_{k+1})-2f(x_k)+f(x_{k-1})}{h}+O(h^3)\tag{26-41}$$

代替方程中的 $y'(x_k)$ 和 $y''(x_k)$。得

$$\frac{y(x_{k+1})-2y(x_k)+y(x_{k-1})}{h^2}+\frac{y(x_{k+1})-y(x_{k-1})}{2h}+x_ky(x_k)=O(h^2)\tag{26-42}$$

边界条件为

$$y(x_0)=1,y(x_{N+1})=0\tag{26-43}$$

当 N 足够大时，

$$\begin{cases}\dfrac{y_{k-1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}+\dfrac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}+x_ky_k=0 & (26-42)'\\ y_0=1,y_{n+1}=0 & (26-43)'\end{cases}$$

这里 y_k 是 $y(x_k)$ 的近似值。

把 $(26-42)'$ 和 $(26-43)'$ 整理后得到关于 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的线性方程组

$$\begin{bmatrix} -2+h^3 & 1+h/2 & & & \\ 1-h/2 & -2+2h^3 & \ddots & & \\ & 1-h/2 & \ddots & & \\ & & \ddots & -2+(N-1)h^3 & 1+h/2 \\ & & & 1-h/2 & -2+Nh^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+h/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26\text{-}44)$$

利用高斯消去法解出上面的方程组，得到表 26-4 所列的数值结果：

表 26-4 数据表

x_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N=5		.7274		.4990		.3049		.1394	
N=10	.8572	.7272	.6082	.4987	.3978	.3046	.2186	.1393	.0665
$y(x_k)$	.8562	.7272	.6081	.4986	.3977	.3045	.2184	.1393	.0664

不难看出当 $N=10$ 时近似解和精确解 $y(x_k)$ 已经重合得很好。

■■■ 已知一组实测数值（如表 26-5 所示），拟合它们的数学模型是一个二阶常微分方程，需要求出其中的待定拟合参数。这是一个反问题，如已知拟合模型是 $xy''+ay'+(x-b)y=0$，其中 a 和 b 是待定的整参数，试求常数 a 和 b。

表 26-5 数据表

x_i	y_i	x_i	y_i
0.8	1.73036	1.6	2.73309
1.0	1.95532	1.8	3.02549
1.2	2.19756	2.0	3.33334
1.4	2.45693	2.2	3.65563

解：将微分方程在 x_i 点上离散，即用二阶中心差商去代替 y''，用一阶中心差商去代替 y'，令 $h=x_{i+1}-x_i=0.2$，$x_i=0.8+0.2i, i=0,1,2,\cdots,7$，得到内点 x_i 上的差分方程

$$x_i\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+a\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+(x_i-b)y_i=0 \qquad i=0,1,2,\cdots,6$$

它们是关于未知量 a 和 b 的超定方程组

$$\begin{cases} 1.1680a-1.9553b=-2.3873 \\ 1.2540a-2.1976b=-3.1510 \\ 1.3388a-2.4569b=-4.0274 \\ 1.4214a-2.7331b=-5.0225 \\ 1.5006a-3.0255b=-6.1411 \\ 1.5754a-3.3333b=-7.3887 \end{cases}$$

用最小二乘法求解，得方程

$$\begin{bmatrix} 11.4832 & -22.0051 \\ -22.0051 & 42.4236 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -40.1260 \\ 78.4233 \end{bmatrix}$$

其解为 $a=7.9828, b=5.9893$，取整后得 $a=8, b=6$。

练习 8 比较求一阶导数和二阶导数的数值方法。

(1) $y_1(x)=\dfrac{1}{24}x^6-\dfrac{13}{8}x^2,\quad x\in[0,3]$；

(2) $y_2(x)=e^{-\frac{1}{x}},\quad x\in[0.5,2]$；

(3) $y_3(x)=e^{-x^2}\cos 20x,\quad x\in[0,2]$。

实验要求：

(1) Mathematica 显示以上函数图形，观察每个图形的特点；

(2) 利用等距节点上的函数值，必要时给出端点导数值，分别用重分差分法、样条函数法计算上述函数的一阶和二阶导数；

(3) 研究分析对每一种函数哪些数值方法有效？说明精度和 h 的关系。

26.8 值得进一步研究的问题

问题 1 对下面你知道答案的几个例子，比较三种方法的精度。在每种情况下，分别计算近似值与误差＝近似值-真值。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$ (2) $\int_0^1(2x+1)\,dx$ (3) $\int_0^2(4-x^2)\,dx$ (4) $\int_{-1}^3(5x^3-6x^2+0.3x)\,dx$

取同样的 $n=2m$ 比较每种方法误差的大小，并观察每种方法随 n 增加一倍时对误差大小的影响。

提示：通过对各种方法计算比值 $\text{Error}(n)/\text{Error}(2n)$ 跟踪近似值的改进。

问题 2 计算 $\int_{-1}^1\sqrt{|1-x^2|}\,dx$，你能否得到 $\dfrac{\pi}{2}$ 的近似值？如果每次加倍 m 值，对每种方法你需要多大的 m 值可以得到精确到第 2、3、4 等小数位的 π 值？也可试试 $m=10,100,1000$。

思考：为什么被积函数需要带上绝对值？

问题 3 选择其它函数和区间，对其应用三种求积分的方法计算积分近似值，例如 $\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}\,dx$。

问题 4 选一个在区间 $[a,b]=[-1,1]$ 上我们不知道如何积分的函数，如 $f(x)=e^{-x^2}$，比较用不同方法得到的此积分的近似值。

问题 5 关于函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在区间 $[a,b]=[1,2]$ 上的积分又如何？在区间 $[a,b]=[0,1]$ 上呢？

有很多表示弧长的积分，但我们很少能解析地计算它们。于是它们就经常需要应用数值方法来计算，其中椭圆的周长就是一种这样的积分。

考虑椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$，其中 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$。假定椭圆的主轴是水平轴，即 $b\leqslant a$。参数化的速率是

$$\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}$$

并且弧长 $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,d(t)$，所以

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1-(1-\frac{b^2}{a^2})\cos^2 t]^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$$

习惯上把计算L的公式中最后一步里的表达式写为$k^2=(1-\frac{b^2}{a^2})$，其中非负的平方根k被称为椭圆的离心率。

问题 6　(a) k的取值范围如何？圆的离心率是什么？

(b) 积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$被称为完全椭圆积分。选择 a=1，于是$k^2=1-b^2$，利用辛普森法找到$k=0,0.1,0.2,\cdots,0.9,1.0$时这个积分的值。这些结果和你关于各种椭圆周长的直观印象比较如何？

问题 7　数值积分应用于求解积分方程。

(1) $y(x)=\int_0^1(\frac{1}{1+t}-x)y(t)\,\mathrm{d}t+\frac{4x^3+5x^2-2x+5}{8(x+1)^2}$，其精确解 $y(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

(2) $y(x)=\int_0^1(t-x)y(t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{2x}+\left(\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}\right)x-\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$，其精确解 $y(x)=\mathrm{e}^{2x}$

分别用梯形公式、辛普森公式和三点高斯求积公式去离散积分方程中的积分项，并求解以上积分方程，得到其解函数的近似表达式，分析比较结果。

问题 8　学会用数值微分方法求解偏微分方程。在单位正方形上有偏微分方程。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=xy(x^2+y^2),$$

求解条件是:

$$u(0,y)=u(x,0)=0\,;$$

$$u(1,y)=y^3/6\,;u(x,1)=x^3/6$$

分别取$N=5,10,15$把单位正方形划分成$N\times N$个小格子，并把格子线的交点编号(i,j)，记$u(x_i,y_j)=u_{i,j}$。用数值微分公式建立关于$u_{i,j}$的线性代数方程组，并求解。该方程的精确解是$u(x,y)=(xy)^3/6$。将精确解和近似解画在同一张三维图上，分析比较你的计算结果。

实验二十七　常微分方程的数值解

微分方程是研究函数变化规律的有力工具，在科技、工程、经济管理以及生态、环境、人口、交通等各个领域中有着广泛的应用。如在研究弹性物体的振动，电阻、电容、电感电路的瞬变，热量在介质中的传播，抛射体的轨迹，以及污染物浓度的变化，人口增长的预测，种群数量的演变，交通流量的控制等等过程中，作为研究对象的函数，要和函数的导数一起，用一个符合其内在规律的方程，即微分方程来描述。常微分方程分为初值问题与边值问题两大类。在高等数学或常微分方程课程中，只介绍了一些典型方程求解析解的方法。然而，在自然科学和工程技术中遇到的微分方程往往比较复杂，很难甚至不能求出其解的解析表达式，只能用近似方法来求解。近似解法主要有两类：一类叫做近似解析方法，它能给出解的近似表达式，例如熟知的级数解法和逐次逼近法等；另一类近似解法称为数值方法，它可以给出解在一些离散点上的近似值。

本实验重点研究下面初值问题数值求解方法

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad a \leqslant x \leqslant b \tag{27-1}$$

其中f为x,y的已知函数，y_0为给定的初始值。

由微分方程的理论可知，如果$f(x,y)$在区域$a \leqslant x \leqslant b, -\infty < y < +\infty$内连续，且关于$y$满足李普希兹(Lipschitz)条件，即存在常数L，使

$$|f(x,y) - f(x,\overline{y})| \leqslant L|y - \overline{y}|$$

对所有的$a \leqslant x \leqslant b$及任何$y, \overline{y}$均可成立，则初值问题(27-1)有连续可微的解$y(x)$存在且唯一。

所谓数值解法，就是寻求微分方程初值问题或边值问题之解$y(x)$在一系列离散点$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$上的值$y(x_n)$的近似值$y_n(n = 0,1,\cdots,N)$的方法。$\{y_n\}$称为问题的数值解，数值解所满足的离散方程统称为差分格式。相邻两个节点之间的距离$h_n = x_n - x_{n-1}$称为步长，通常将步长h_n取为常数h。

27.1　欧拉方法

欧拉（Euler）方法是最简单的数值解法，虽然它的精确度极差，但构造这个方法的基本原理对于构造一般的数值方法具有普遍意义。

27.1.1　欧拉方法的构造

将方程(27-1)中点x_n处的导数$y'(n)$用差商近似的表示为

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \tag{27-2}$$

即在该点有近似等式$\dfrac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx f(x_n, y(x_n))$。由$y_n$代替$y(x_n)$，由上式可以导出其近似值满足的差分方程

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n),n=0,1,\cdots,N-1 \tag{27-3}$$

(27-3) 式称为欧拉方法的计算公式或称为欧拉公式。当初始值 $y_0=a$ 给定时，利用欧拉公式就可以逐次计算出初始值问题的数值解 $y_0,y_1,\cdots,y_N$。

下面我们来讨论用欧拉公式近似解微分方程的逼近误差。设问题（27-1）的解 $y(x)$ 二阶连续可微，由泰勒展开有

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hf(x_n,y(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+O(h^3)(n=0,1,2,\cdots,N-1)$$

显然，如果假定 $y_n=y(x_n)$，则有

$$R_{n,h}=y(x_{n+1})-y_{n+1}=\frac{h^2}{2}y''(x_n)+O(h^3) \tag{27-4}$$

称 $R_{n,h}$ 为欧拉方法的局部截断误差。当 $h\to 0$ 时，$R_{n,h}$ 是与 h^2 同阶的无穷小量 $O(h^2)$。

若一种数值算法的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$，则称该算法具有 p 阶精度，所以欧拉方法是一个一阶方法。

实验 1 用欧拉公式解初值问题

$$\begin{cases} y'=y-\dfrac{2x}{y},0\leqslant x\leqslant 1 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

解：取步长 $h=0.1$，则 $y_{n+1}=y_n+h(y_n-\dfrac{2x_n}{y_n})$，其中 $x_n=nh=0.1n(n=0,1,\cdots,10)$，已知 $y_0=1$，由此式可得

$$y_1=y_0+h(y_0-\frac{2x_n}{y_0})=1+0.1=1.1$$

$$y_2=y_1+h(y_1-\frac{2x_1}{y_1})=1.1+0.1(1.1-\frac{0.2}{1.1})=1.191818$$

依次计算下去，与准确解 $y=\sqrt{1+2x}$ 相比，可看出欧拉公式的计算结果精度不太高，如图 27-1 所示。

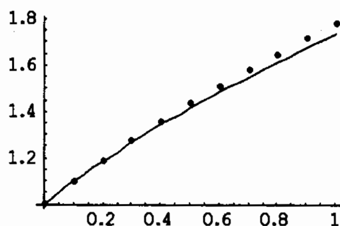


图 27-1 数值计算结果与精确解的比较

练习 1 试说明欧拉公式的几何意义。

练习 2 试讨论欧拉公式的求解误差。

27.1.2 后退的欧拉公式

如果在点 x_{n+1} 处用向后差商近似（27-1）式中的导数 $y'(x_{n+1})\approx\dfrac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}$ 即有

$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$。再用近似值 y_i 代替 $y(x_i)(i = n, n+1)$,则可导出近似值满足的方程

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \tag{27-5}$$

(27-5)式称为后退的欧拉公式。它与欧拉公式（27-3）的一个明显区别是：已知 y_n 时，必须通过解方程才能求出 y_{n+1}。这样的公式成为隐式公式，而欧拉公式则为显式公式。

可以证明，隐式的后退欧拉公式(27-5)的局部截断误差为

$$R_{n,h} = -\frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3) = O(h^2) \tag{27-6}$$

其精度亦为 1 阶。在利用后退的欧拉公式计算时，一般用向前欧拉公式产生初值，

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n), n = 0,1,2,\cdots \tag{27-7}$$

再按下式迭代，

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + hf(x_{n+1,}\ y_{n+1}^{(k)}), \qquad k = 0,1,2,\cdots; n = 0,1,2,\cdots \tag{27-8}$$

为讨论局部截断误差，在图 27-2 中设点 $p_n(x_n, y_n)$ 落在积分曲线 $y = y(x)$ 上，按式(27-3)及式(27-5)分别得 P_{n+1} 点为 A 与 B，且 A,B 两点一定在积分曲线 $y = y(x)$ 上相应点 Q' 的上下两边，所以将式(27-3)与式(27-5)平均之，一定能得到更好的结果。

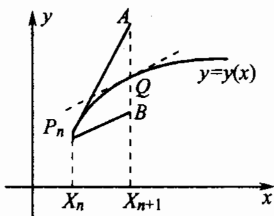


图 27-2 欧拉法的几何意义

27.1.3 改进的欧拉公式

将向前与向后欧拉公式加以平均得到所谓梯形公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{27-9}$$

其局部截断误差为 $O(h^3)$，具有二阶精度。梯形公式也是隐式的,其实际应用时常与显式的欧拉公式联合使用，构成如下的计算格式

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})\right], \end{cases} \quad k = 0,1,2,\cdots \tag{27-10}$$

即先用欧拉公式算出初始近似值 $y_{n+1}^{(0)}$,然后用(27-10)式的第二式进行迭代，反复改进这个近似值,直到 $\left|y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1}^{(k)}\right| < \varepsilon$ （ε 为所允许的误差)为止,而把 $y_{n+1}^{(k+1)}$ 取作 $y(x_{n+1})$ 的近似 y_{n+1}，类似地计算 $y_{n+2}, y_{n+3}, \cdots$。

显然，如果上述迭代序列 $y_{n+1}^{(0)}, y_{n+1,}^{(1)} \cdots$ 收敛，其极限便满足方程

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

即求序列的极限时梯形公式所得的解 y_{n+1}。容易证明，只要 h 取得充分小，上述迭代过程必定收

敛。事实上，将(27-9)式与(27-10)式的第二式相减，得

$$y_{n+1}-y_{n+1}^{(k+1)}=\frac{h}{2}\left[f(x_{n+1},y_{n+1})\right]-\left[f(x_{n+1},y_{n+1}^{(k)})\right]$$

由于f满足李普希兹条件，故有$\left|y_{n+1}-y_{n+1}^{(k+1)}\right|\leqslant\frac{hL}{2}\left|y_{n+1}-y_{n+1}^{(k)}\right|$。

因此，只要h充分小，使$\frac{hL}{2}<1$（其中L为李普希兹常数），迭代过程是收敛的。但计算时需要迭代多少次，一般事先无法估计。实践表明，在h取得较小的条件下，迭代效果主要体现在第一次。因此，通常让计算迭代一次就结束，将其一次迭代值取作y_{n+1}，这时得到以下预测—校正型公式为

$$\begin{cases}\text{预测} & y_{n+1}^{(0)}=y_n+hf(x_n,y_n)\\ \text{校正} & y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{(0)})\right]\quad(n=0,1,2,\cdots)\end{cases}\tag{27-11}$$

或直接写成

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))]\\ y_0=a\end{cases}\tag{27-12}$$

(27-11)式或(27-12)式称为改进的欧拉公式。将(27-12)式展开后与初始问题的解的泰勒展开式比较，可知其局部截断误差仍是$O(h^3)$，即改进的欧拉公式是2阶方法，且是显式方法。

最后指出，上述欧拉方法可推广至解微分方程组。如

$$\begin{cases}y'=f(x,y,z)\\ z'=g(x,y,z)\\ y(x_0)=y_0,z(x_0)=z_0\end{cases}\tag{27-13}$$

向前欧拉公式为

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n,z_n)\\ z_{n+1}=z_n+hg(x_n,y_n,z_n)\end{cases},n=0,1,2,\cdots\tag{27-14}$$

实验2 用欧拉方法和改进的欧拉方法求初值问题，

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{y^2}\\ y(0)=1\end{cases}$$

在区间$[0,1]$上取$h=0.1$的数值解。

解：欧拉方法的计算公式为$y_{n+1}=y_n+h\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{x_n}{y_n^2}$，　　$y_0=1,h=0.1$。

改进的欧拉方法其计算公式为

$$\begin{cases}y_{n+1}^{(0)}=y_n+h\cdot\frac{2}{3}\frac{x_n}{y_n^2}\\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{x_n}{y_n^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x_{n+1}}{\left(y_{n+1}^{(0)}\right)^2}\right]\\ y_0=1,h=0.1\end{cases}$$

精确解为 $y(x)=\sqrt[3]{1+x^2}$，可用来检验数值解的精确度，计算结果如图 27-3 所示。

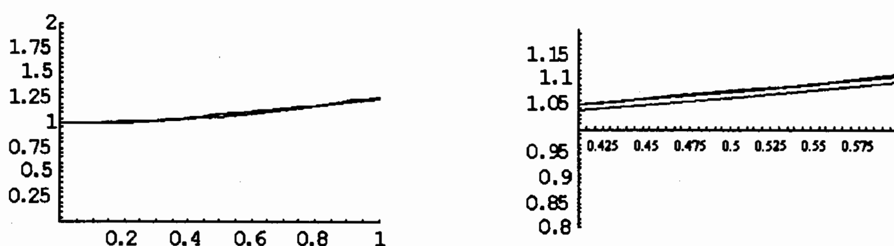


图 27-3　不同方法解的比较（左、右图绘图区间分别为 [0,1]、[0.4,0.6]）

由图 27-3 可以看出改进的欧拉法比欧拉法精度高。

练习 3　用欧拉法计算下列积分在点 $x=0.5,1,1.5,2$ 处的近似值。

$$I(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt$$

练习 4　对给定的初值问题，

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y') \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_0' \end{cases}$$

写出改进的欧拉公式。

练习 5　分别用欧拉法和改进的欧拉法解下面的初值问题。

$$\begin{cases} y''-2y^3=0 \\ y(1)=y(1)=-1 \end{cases}, \quad 1\leqslant x\leqslant 1.3$$

取 $h=0.1$ 计算，并与准确解 $y=\dfrac{1}{x-2}$ 相比较。

练习 6　利用改进的欧拉方法求解

$$y'(x)=-p\sin px \quad, \quad y(0)=1$$

取 $p=3,4,5$ 和不同的步长 h

练习 7　考虑局部截断误差积累的影响而不计舍入误差，所得到的差分方程的精确解 y_n 与微分方程精确解 $y(x_n)$ 的误差 $\varepsilon_n=|y(x_n)-y_n|$，称为整体截断误差。对于初始值问题

$$\begin{cases} y'(x)+y=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

分别给出用显、隐式欧拉方法和梯形公式得到的解，当 x 固定时，给出整体截断误差，并加以比较。

练习 8　给出欧拉方法的整体截断误差与局部截断误差的关系，并推导之。

练习 9　观察显式欧拉方法的收敛性。取 $h=0.1,0.05,0.01,\cdots$，用显式欧拉方法求解初值问题：

$$\begin{cases} y'=xy^{\frac{1}{3}} \\ y(1)=1 \end{cases}$$

练习 10　观察显式欧拉方法求解

$$\begin{cases} y' = -50y \\ y(0) = 100 \end{cases}$$

并画出曲线，同样用隐式欧拉方法重复求解上述问题。

实验 3 利用欧拉方法求解以下微分方程组

$$\begin{cases} x' = \pi\sin(\pi x)\cos(\pi y) \\ y' = -\pi\cos(\pi x)\sin(\pi y) \\ x(0) = 0.9 \quad y(0) = 0.1 \end{cases}$$

解：选取步长 $h = 0.01$，分别在区间 $[0,1],[0,2]$ 画出欧拉方法的求解结果并以精确解比较的图形如图 27-4 所示。

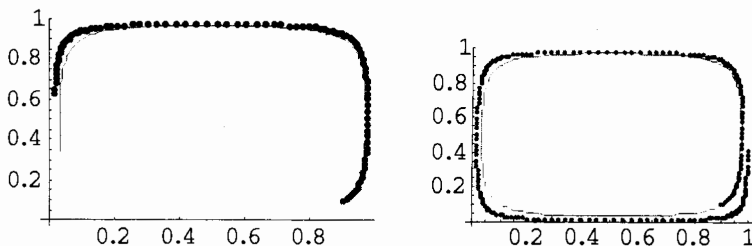


图 27-4 数值结果与精确解的比较

练习 11 改变不同的初值，重做实验 3。

27.2 龙格-库塔公式

对很多实际问题来说，欧拉公式与改进欧拉公式精度还不能满足要求，为此从另一角度来分析这两个公式的特点，从而探索一条构造高精度方法途径。

设 $y(x)$ 为初值问题(27-1)的准确解，根据微分中值定理

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(\eta_n)h = y(x_n) + hf(\eta_n, y(\eta_n)), \quad \eta_n \in (x_n, x_{n+1})$$

$f(\eta_n, y(\eta_n))$为解曲线 $y(x)$ 在区间$[x_n, x_{n+1}]$上的平均斜率。可见，只要能对平均斜率提供一种近似算法，就能得到一种对应的差分格式。欧拉公式(27-3)相当于取一个点 (x_n, y_n) 处的斜率 $f(x_n, y_n)$ 近似代替平均斜率，其精度较低。将改进的欧拉公式(27-11)变形为

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_{n+1}, y_n + hk_1) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \end{cases} \tag{27-15}$$

则可以看出改进的欧拉公式相当于取 (x_n, y_n)、$(x_{n+1}, y_n + hk_1)$ 两点处斜率的平均值，近似代替平均斜率，其精度比欧拉公式提高了。

由此，如果在区间$[x_n, x_{n+1}]$内多预测几个点的斜率，用它们的加权平均代替平均斜率，则有可能构造出精度更高的公式。例如取 m 个点的斜率可构造如下形式的公式：

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + a_2h, \quad y_n + b_{21}hk_1) \\ k_3 = f(x_n + a_3h, \quad y_n + b_{31}hk_1 + b_{32}hk_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_m = f(x_n + a_m h, \quad y_n + b_{m1}hk_1 + \cdots + b_{m,m-1}hk_{m-1}) \\ y_{n+1} = y_n + h(c_1k_1 + c_2k_2 + \cdots + c_mk_m) \end{cases} \tag{27-16}$$

其中 a_i, b_{ij}, c_i 都是与 f, n 无关的常数，其值应使公式(27-16)的精度尽可能高，该公式称为 m 级龙格-库塔 (Runge– Kutta) 公式，简称 R-K 公式。

显然，只要将公式(27-16)的局部截断误差在 x_n 点进行泰勒展开，令其前面尽可能多的项为 0，便可导出 a_i, b_{ij}, c_i 所满足的方程组，即可从中求出这些系数。

从以上的分析启示我们，龙格-库塔方法的基本思想是：利用 $f(x, y)$ 在某些点处的值为线性组合，来构造一类计算公式，使其按展开后与初值问题的解的泰勒展开式比较，有尽可能多的项完全相同以确定其中的参数，从而保证算式有较高的精确度。由于避免了在计算式中直接用到 $f(x, y)$ 的导数，所以说龙格-库塔方法是基于间接利用泰勒展开的思想。

27.2.1 二阶龙格–库塔公式

首先，不妨在区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 内仍取 2 个点，仿照(27-11)式用以下形式试一下

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta hk_1), \quad 0 < \alpha, \beta < 1 \end{cases} \tag{27-17}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta$ 为待定系数，看看如何确定它们使(27-17)式的精度尽量高。为此，我们分析局部截断误差 $y(x_{n+1}) - y_{n+1}$，因为 $y_n = y(x_n)$，所以(27-17)式可化为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y(x_n) + h(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2) \\ k_1 = f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n) \\ k_2 = f(x_n + \alpha h, y(x_n) + \beta hk_1) \\ \quad = f(x_n, y(x_n)) + \alpha hf_x(x_n, y(x_n)) + \beta hk_1 f_y(x_n, y(x_n)) + O(h^2) \end{cases} \tag{27-18}$$

其中 k_2 在点 $(x_n, y(x_n))$ 作了泰勒展开。(27-18)式又可表为

$$y_{n+1} = y(x_n) + (\lambda_1 + \lambda_2)y'(x_n) + \lambda_2 \alpha h^2 (f_x + \frac{\beta}{\alpha} f \cdot f_y) + O(h^3) \tag{27-19}$$

注意到在 $y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3)$ 中 $y' = f, y'' = f_x + f \cdot f_y$，可见为使误差 $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$，只需令

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \ \lambda_2 \alpha = \frac{1}{2}, \ \frac{\beta}{\alpha} = 1 \tag{27-20}$$

待定系数满足(27-20)式的(27-17)式称为二阶龙格-库塔公式。由于(27-20)式中有 4 个未知数而只有 3 个方程，所以解不唯一。(27-20)式的每一组解都使(27-19)式的局部截断误差为 $O(h^3)$，即都使(27-17)式成为一个二阶方法。较常用的方法有两个：一个是取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}, \alpha = \beta = 1$，这就是改进的欧拉方法。另一个是取 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \alpha = \beta = \frac{1}{2}$，即得

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \end{cases} \tag{27-21}$$

(27-21)式通常称为中心点公式。二阶龙格-库塔方法每一步需要两次计算函数f的值。

可以证明，在$[x_n, x_{n+1}]$内只取 2 点的龙格-库塔公式精度最高为二阶。

27.2.2 四阶龙格－库塔公式

要进一步提高精度，必须取更多的点，如取 4 点构造如下的公式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3 + \lambda_4 k_4) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \alpha_1 h, \quad y_n + \beta_1 hk_1) \\ k_3 = f(x_n + \alpha_2 h, \quad y_n + \beta_2 hk_1 + \beta_3 hk_2) \\ k_4 = f(x_n + \alpha_3 h, \quad y_n + \beta_4 hk_1 + \beta_5 hk_2 + \beta_6 hk_3) \end{cases} \tag{27-22}$$

其中待定系数$\lambda_i, \alpha_i, \beta_i$共 13 个，经过与推导二阶龙格-库塔公式类似但更复杂的计算，得到使局部误差$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^5)$的 11 个方程。这些公式也有无穷多个，下面给出了比较重要的两个公式。

标准（又称古典）四阶龙格-库塔公式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{n}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}) \\ k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases} \tag{27-23}$$

其计算精度为四阶。

基尔公式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[k_1 + (2-\sqrt{2})k_2 + (2+\sqrt{2})k_3 + k_4] \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}) \\ k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{\sqrt{2}-1}{2}hk_1 + \frac{2-\sqrt{2}}{2}hk_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n - \frac{\sqrt{2}}{2}hk_2 + (1+\frac{\sqrt{2}}{2})hk_3) \end{cases} \tag{27-24}$$

标准四阶公式(27-23)是实际计算最常用的一个龙格-库塔型公式，基尔公式具有减少舍入误差及稳定性好的优点。

像欧拉公式一样，龙格-库塔公式也可以推广到解微分方程组和高阶方程。

实验 4 （不同方法的精度比较）用多种方法解下述初始值问题，并与其准确解 $y=e^{-x}+x$ 进行比较。

$$\begin{cases} y' = -y+x+1, \ 0\leqslant x\leqslant 0.6 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

解：取步长 $h=0.1$, $x_k=kh(k=0,1,\cdots.6)$。用各种方法进行计算，计算结果见表 27-1。

表 27-1　用各种方法进行计算的结果

x_n	欧拉公式 y_n	误差 $(\times 10^{-3})$	改进的欧拉公式 y_n	误差 $(\times 10^{-4})$	标准四阶龙格-库塔公式 y_n	误差 $(\times 10^{-7})$
0.0	1.000000	0	1.000000	0	1.000000	0
0.1	1.000000	4.8	1.005000	1.6	1.00483750	0.8
0.2	1.010000	8.7	1.019025	2.9	1.01873090	1.5
0.3	1.029000	1.2	1.041218	4.0	1.04081842	2.0
0.4	1.056100	1.4	1.070802	4.8	1.07032029	2.4
0.5	1.090490	1.6	1.107076	5.5	1.10653093	2.7
0.6	1.131441	1.8	1.149404	5.9	1.14881193	2.9

对比以上各组数据可以看到：在相同步长下求同一问题时，方法的阶数越高，解的精度越高。结果的图形比较如图 27-5。

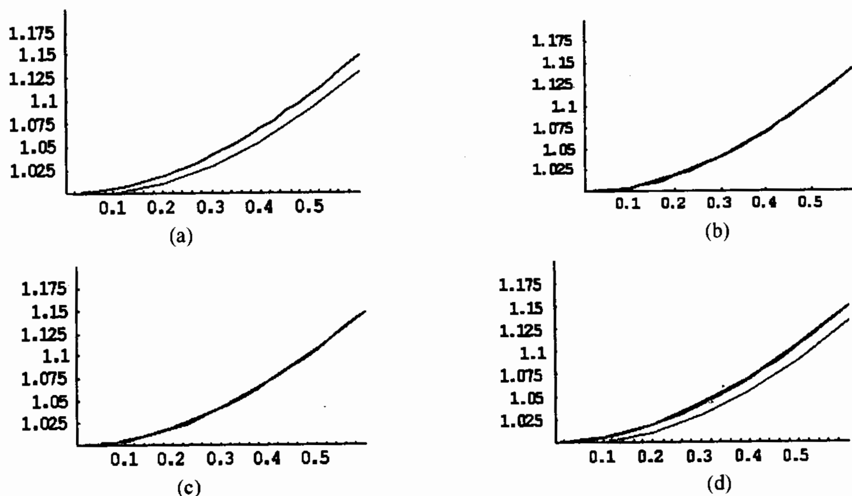


图 27-5　同一步长、不同方法计算结果的比较

(a) 欧拉法与精确解的比较；(b) 改进的欧拉法与精确解的比较；

(c) 龙格-库塔公式与精确解的比较；(d) 三种方法的比较。

实验 5 考虑常微分方程初始值问题，

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{2}(-y+x^2+4x-1) \\ y(0)=0 \end{cases}$$

其解析解为 $y(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+x^2-1$。试说明用 $h=0.001$ 的一阶显式欧拉公式，$h=0.002$ 改进的欧拉公式和 $h=0.004$ 的经典龙格-库塔公式计算到 $x=0.5.$。

解：三种方法在 x 方向每前进 0.004 都要计算 4 个右端函数值，计算量相当。计算结果见表 27-2。

表 27-2　三种方法的计算结果

x_n	欧拉法($\times10^{-2}$)	改进的欧拉法($\times10^{-2}$)	经典 R-K 法($\times10^{-2}$)	精确值($\times10^{-2}$)
0	0	0	0	0
0.004	−0.1986	−0.19825	−0.198200133266	−0.198200133267
0.008	−0.3937	−0.39289	−0.392801065600	−0.392801065601
0.012	−0.5851	−0.58395	−0.583803594606	−0.583803594606
0.016	−0.7730	−0.77139	−0.771208516293	−0.771208516294
0.020	−0.9573	−0.95525	−0.955016625082	−0.955016625083

从以上计算结果看，它们的最大绝对误差：欧拉法是 2×10^{-5}，改进的欧拉法是 2×10^{-6}，经典四阶龙格-库塔法是 10^{-14}。因此，经典四阶龙格－库塔法步长最大，计算精度最高。结果的图形比较如图 27-6。

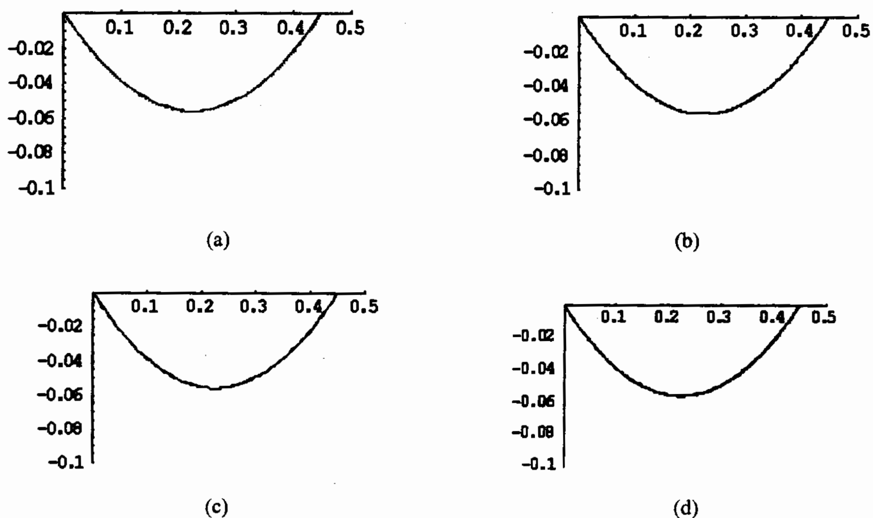


图 27-6　不同步长、不同方法计算结果的比较

(a) 欧拉法与精确解的比较；(b) 改进的欧拉法与精确解的比较；
(c) 龙格－库塔公式与精确解的比较；(d) 三种方法的比较。

对多数好条件问题，都能获得好的结果。

练习 12　比较不同算法用于“非光滑”解时的结果。用显式欧拉法公式和标准四阶龙格-库塔法求解 $\begin{cases} y'=\left|\sin kx\right| \\ y(0)=1 \end{cases}$，并计算 $y(2\pi)$ 并在一张图上画出解曲线。

练习13　初步认识刚性微方程。任意选用一种你知道的显式方法，取不同步长，求解

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2000u+999.75v+1000.25\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=u-v\\ u(0)=0,v(0)=-2\end{cases}$$

，并分析计算结果，提出改进精度的有效算法。

练习 14 （解初值问题的各种方法的比较）给定的初值问题。

$$\begin{cases}y'=\frac{2}{x}y+x^2\mathrm{e}^x,\ 1\leqslant x\leqslant 2\\ y(1)=0\end{cases}$$

其准确解为 $y=x^2(\mathrm{e}^x-\mathrm{e})$，分别按下列方案求它在节点 $x_k=1+0.1k(k=1,2,\cdots,10)$ 处的数值解及误差，比较各方法的优缺点。

方案 I　欧拉法，步长 $h=0.025,h=0.1$；

方案 II　改进的欧拉法，步长 $h=0.05,h=0.1$；

方案 III　四阶标准龙格-库塔法，步长 $h=0.1$。

27.3 收敛性和稳定性

各种欧拉公式和龙格一库塔公式的共同特点是:计算 y_{n+1} 时只用到 y_n 这一步的信息，统称单步法。如果还用到前一步 y_{n-1}，甚至 $y_{n-2},\cdots$，这就叫做多步法。我们已经用单步法求解了一些常微分方程，也在数值上与精确解做过比较，但是在理论上近似解是否收敛于精确解，总的误差如何估计？本节简单介绍单步法的收敛性与稳定性。

27.3.1 收敛性

通过前面的讨论可以看到，微分方程数值解法的基本思想是：通过某种离散化手段，将微分方程转化为差分格式求解。当步长 $h\to 0$ 时，差分解 y_n 是否收敛于微分方程之解 $y(x)$，这就是差分格式的收敛性问题。

用一种数值方法求解方程(27-1)，对于任意固定的 $x_n=x_0+nh$，近似解和精确解分别记作 $y_n,y(x_n)$，若当 $h\to 0$ 时（必然 $n\to\infty$），有 $y_n\to y(x_n)$，则称该数值方法收敛，单步法（显式）可以统一地表为如下形式：

$$y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,h) \tag{27-25}$$

其中 $\varphi(x,y,h)$ 称为增量函数。如对向前欧拉公式(27-3)，$\varphi=f(x,y)$；对改进的欧拉公式(27-11)，$\varphi=\dfrac{f(x,y)+f(x+h,y+hf(x,y))}{2}$。

关于单步法的收敛性和整体误差有以下定理。

定理　设一种单步法(27-25)具有 p 阶精度，增量函数关于 y 满足李普希兹条件

$$|\varphi(x,y,h)-\varphi(x,\overline{y},h)|\leqslant L|y-\overline{y}| \tag{27-26}$$

且方程(27-1)的初始值是精确的，则该方法收敛，且整体误差

$$\varepsilon_n=y(x_n)-y_n=O(h^p) \tag{27-27}$$

由定理知，整体截断误差比局部截断误差的阶数低一阶。前面介绍的向前欧拉公式、改进的欧拉公式，四阶龙格-库塔公式都是收敛性的，它们的误差分别为$O(h)$，$O(h^2)$，$O(h^3)$。

27.3.2 单步法的稳定性

数值计算精确是讨论收敛性的前提，而实际上，舍入误差的存在使每一步的计算都有偏差。利用差分格式求解时，初始误差及计算过程中的舍入误差能否得到控制，这就是差分格式的稳定性问题。

由于研究的对象不同，关于稳定性的定义很多，这里只介绍一种——绝对稳定性。

由于实际问题中微分方程(27-1)的右端$f(x,y)$复杂多样，这给研究稳定性带来了困难，因此通常取以下的模型方程为基础进行研究

$$y' = \lambda y \qquad (\lambda < 0)$$

其中λ为常数，$\lambda<0$表示微分方程本身是稳定的。

若取步长h，用某种差分格式解模型方程时，任何一步产生的舍入误差在以后的计算中引起的误差逐渐减弱，则称该差分格式关于$z=\lambda h$是绝对稳定的，使差分格式稳定的所有z值的集合称为绝对稳定区间。例如，将向前欧拉公式用于模型方程$y'=\lambda y$，得$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=(1+\lambda h)y_n$。不妨设在$y_n$上有误差$\varepsilon_n$，则由此引起$y_{n+1}$的误差$\varepsilon_{n+1}$满足$y_{n+1}+\varepsilon_{n+1}=(1+\lambda h)(y_n+\varepsilon_n)$。所以

$$\varepsilon_{n+1}=(1+\lambda h)\varepsilon_n \tag{27-28}$$

显然，要保证误差逐渐减弱，必须使$z=\lambda h$满足$|1+z|<1$即$-2<z<0$。可见欧拉公式的绝对稳定区间是$(-2,0)$。它表明，对模型方程$y'=\lambda y(\lambda<0)$，步长h必须满足$0<h<\left|\frac{2}{\lambda}\right|$才能保证欧拉公式数值稳定。表27-3列出了各种单步法的绝对稳定的表达式和它们的绝对稳定区间。

表27-3　单步法的绝对稳定区间

方　法	$E(\lambda h)$	绝对稳定区间
欧拉法	$1+\lambda h$	$-2<\lambda h<0$
改进的欧拉法	$1+\lambda h+\frac{(\lambda h)^2}{2}$	$-2<\lambda h<0$
标准四阶 *R-K* 法	$1+\lambda h+\frac{1}{2}(\lambda h)^2+\frac{1}{3!}(\lambda h)^3+\frac{1}{4!}(\lambda h)^4$	$-2.785<\lambda h<0$
后退欧拉法	$\frac{1}{1-\lambda h}$	$-\infty<\lambda h<0$
梯形公式	$\frac{1+\frac{1}{2\lambda h}}{1-\frac{1}{2\lambda h}}$	$-\infty<\lambda h<0$

从表27-3中可以看到，隐式公式比同阶显式公式的稳定区间大。

研究一般方程$y'=f(x,y)$的稳定性时，$\frac{\partial f}{\partial y}$相当于模型方程中的$\lambda$。例如对欧拉公式

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$$

设y_n有误差ε_n，则由此引起y_{n+1}的误差ε_{n+1}满足

$$y_{n+1}+\varepsilon_{n+1}=y_n+\varepsilon_n+hf(x_n,y_n+\varepsilon_n)$$

所以

$$\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_n+h\left[f(x_n,y_n+\varepsilon_n)-f(x_n,y_n)\right]=\varepsilon_n+h\frac{\partial f(x_n,\eta_n)}{\partial y}\varepsilon_n$$
$$=(1+h\frac{\partial f(x_n,\eta_n)}{\partial y})\varepsilon_n$$

式中η_n在$y_n+\varepsilon_n$与y_n之间，与式(27-28)相比，可知$\frac{\partial f}{\partial y}$起着$\lambda$的作用，因此为了保证数值方法的绝对稳定，$h\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$应落在它的绝对稳定域中。

综上所述，当用数值方法解微分方程时，步长h的选择由两个因素确定。一是精度要求，由收敛性可知，h越小精度越高。二是稳定性要求，$h\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$应落在所选公式的绝对稳定域中。虽然$h$十分小时两个条件都能满足，但$h$太小计算步数势必大增，每步的微小误差累积起来也很可观。因此，实际计算中在满足精度要求与稳定性的条件下，步长h应尽可能取得大些。

实验6 常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'=-y+x-\mathrm{e}^{-1} \\ y(1)=0 \end{cases}$$

其精确解为$y(x)=\mathrm{e}^{-x}+x-1-\mathrm{e}^{-1}$。分别取$h=1,2,4$，用经典四阶 R-K 法计算，计算结果见表27-4，图形比较如图27-7。

表 27-4 经典四阶 R-K 方法的稳定性实验结果

x_n	h=1	h=2	h=4	精确解
1	0	0	0	0
3	1.6839	1.7547		1.6819
5	3.6394	1.6730	5.4715	3.6389
7	5.6331	5.6457		5.6330
9	7.6323	7.6367	16.8291	7.6322
11	9.6321	9.6336		9.6321
13	11.6321	11.6326	57.6171	11.6321

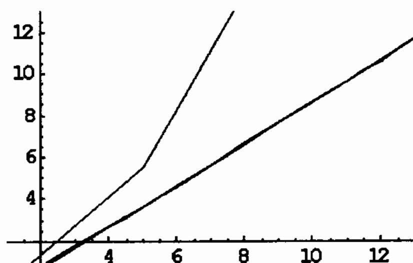


图 27-7 不同步长计算结果的比较

由于 R-K 法的绝对值稳定区间是$-2.785<\lambda h<0$。本实验中，$\lambda=fy=-1$，因此，当$h<2.785$时，该方法才稳定。$h=1$和$h=2$在稳定范围内，计算结果确实稳定。$h=4$超出了范

围，结果发散。另一方面 h 为 1 的计算精度比 h 为 2 的计算精度高。因为 h 越小，方法的截断误差越小。但若 h 过分小的话，计算步数非常多，其累积误差会增加。所以，实际计算时，应选取合适的步长。

实验 7 （步长对计算结果的影响）用欧拉公式求下述初始问题在 $x=1$ 处的近似解，并与准确解 $y(1)=1$ 比较。

$$\begin{cases} y' = -1000(y-x^2)+2x \\ y(0)=1 \end{cases}$$

解：分别取步长 $h=10^{-1}$、$h=10^{-2}$、$h=10^{-3}$、$h=10^{-4}$ 进行计算，结果见表 27-5。

表 27-5 计算结果

步长 h	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$y(1)$	$0.90438207503\times10^{16}$	$>10^{38}$	0.999999000001	0.99999990000

由表 27-5 中数据可见，步长不同效果大不一样，当 $h=10^{-1}$、$h=10^{-2}$ 时结果完全失真，而取 $h=10^{-4}$ 比 $h=10^{-3}$ 计算量增加了十倍，但解的精确度却基本一样，可见取 $h=10^{-4}$ 太浪费计算量了。

上述结果差异很大的原因在于欧拉公式的绝对稳定区间为（-2，0），步长 h 应满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}h\in(-2,0)$。在本实验中 $f(x,y)=-1000(y-x^2)+2x, \dfrac{\partial f}{\partial y}=-1000,$ 故应取 h 满足 $-2<-1000h<0$ 即 $0<h<2\times10^{-3}$。

可见取 $h=10^{-1}$ 和 $h=10^{-2}$ 时欧拉公式是数值不稳定的，导致结果失真，而取 $h=10^{-3}$ 和 $h=10^{-4}$ 都满足稳定性要求，可用于求解。

实验结果表明：求解微分方程时一定要注意步长的选取，过大则导致解的失真，过小又会使计算量大增。究竟取多大步长才合适，不仅取决于所采用的数值方法，还决定于待解微分方程本身的特性。

练习 15 确定一步算法 $y_{k+1}=\alpha y_k + h(\beta f_k+\gamma f_{k+1})$ 中的常数 α,β,γ，使得算法可以给出方程。

$$\begin{cases} y'(x)=x^n, \quad n=0,1 \\ y(0)=0 \end{cases}$$

的精确解，然后判断算法是否收敛的。

练习 16 对于初值问题

$$\begin{cases} y'(x)=f(x,y) \\ y(0)=y_0\neq 0 \end{cases}$$

假设它的解为 $y(x)=\dfrac{a}{x+b}$，利用 $y(x_n)=y_n, y'_n=f_n$ 确定参数 a,b，然后取 $y_{n+1}=\dfrac{a}{x_n+h+b}$ 就得到非线性一步算法。

(1) 给出计算 y_{n+1} 的公式；

(2) 给出它的局部截断误差；

(3) 分析其稳定性（利用模型问题）。

练习 17 对于初值问题

$$\begin{cases} y' = -1000(y - g(x)) + g'(x) \\ y(0) = g(0) \end{cases}$$

其中 $g(x)$ 为已知函数。其解 $y(x) = g(x)$。

(1) 若用欧拉法求解，从稳定性考虑步长应在什么范围内选取？

(2) 若用后退欧拉法求解，从稳定性考虑，步长有没有限制？

(3) 若 $g(x)$ 为不超过一次的多项式，用欧拉法求解此问题时，从精确度考虑，步长的选取有无限制？

(4) 取 $g(x) = x$，分别以步长 $h = 0.1, 0.001, 0.0001$ 的欧拉公式计算 5 步，分析其计算结果并得出结论。

练习 18 （常微分方程性态和 R-K 法稳定性实验）考察下面微分方程右端项中函数 y 前面的参数对方程性态的影响（它可使方程为好条件或坏条件）和研究计算步长对 R-K 法计算稳定的影响。设常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = \alpha y - \alpha x + 1, \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

其中，$-50 \leqslant \alpha \leqslant 50$。其精确解为 $y(x) = e^{\alpha x} + x$。用四阶经典 R-K 法计算并回答以下问题。

(1) 对参数 α，分别取 4 个不同的数值：1 个大的正值，1 个小的正值，1 个绝对值小的负值和 1 个绝对值大的负值。取步长 $h = 0.01$，分别用四阶龙格-库塔法计算，将 4 组计算结果画在同一张图上，进行比较并说明相应初始值问题的性态。

(2) 取参数 α 为一个绝对值不大的负值和两个计算步长，一个步长使参数 αh 在四阶经典龙格-库塔法的稳定域内，另一个步长在四阶经典龙格－库塔法的稳定域外。分别用四阶经典龙格-库塔法计算并比较计算结果。取全域等距的 10 个点上的计算值，列表说明。

27.4 值得进一步研究的问题

问题 1 利用实际例子筛选有效算法。用不同的算法于下面的方程，挑选出你最满意的算法。也可以自己设计新的算法，看看能否比前面介绍的更好。

(1) $y' = (y^2 + xy)/x^2$, $y(1) = 1$，计算到 $x = 2$；

(2) $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4y} - x$, $y(2) = -1$，计算到 $x=4$；

(3) $y' = y(y\sin y - x)^{-1}$, $y(\frac{2}{\pi}) = \frac{\pi}{2}$，计算到 $x = 2$；

(4) $y' = |y\sin x|$, $y(1) = 1$，计算到 $x = 2$。

提示：首先确定“满意”的尺度和标准。可以比较算法的效率、精确度等方面。

问题 2 检查各种数值算法的长期行为。给定方程组

$$\begin{cases} x'(t) = ay(t) \\ y'(t) = -bx(t) \\ x(0) = 0 \quad y(0) = b \end{cases}$$

的解是 xoy 平面上的一个椭圆。利用你已经知道的算法，取足够小的步长，计算上述方程轨道，看看哪种算法能够保持椭圆轨道不变。（计算的时间等要足够多）

问题 3 一个初始重量为 1350kg（包括燃料 1080kg）的小火箭，点燃后垂直向上运动，火箭

中的燃料以18kg/s的常速燃烧。提供3150kg的动力。假定大气阻力与速度平方成正比$D=kv^2$，且设空气运动阻力系数$k=0.039\,\text{kg}\cdot\text{s/m}^2$。试用四阶标准龙格-库塔法，步长$h=0.1$。求燃料烧尽之前的位移、速度、加速度的变化规律。

提示：设火箭位移为y。作用在火箭上的力有：推力$F=3150$；时刻t时火箭的重量引起的重力$W=1350-18t$；大气阻力$D=0.039(y')^2$。根据牛顿第二定律的运动微分方程$y''=\frac{gF}{W}-g-\frac{kg}{W}(y')^2$，初始条件$y(0)=y'(0)=0$。求解范围：$t\in[0,T]$,其中$T=1080/18=60(\text{s})$。

问题4 研究种群竞争模型，当甲、乙两个种群各自生存时，数量演变服从下面的规律：

$$x'(t)=r_1x(1-\frac{x}{n_i}),\ y'(t)=r_2y(1-\frac{y}{n_2})$$

其中，$x(t),y(t)$，分别为t时刻甲、乙两个种群的数量，r_1,r_2为其固有增长率，n_1,n_2为它们的最大容量。而当这两个种群在同一个环境中生存时，由于乙消耗有限资源对甲的增长产生影响，将甲的方程修改为

$$x'(t)=r_1x(1-\frac{x}{n_1}-s_1\frac{y}{n_2}) \tag{27-43}$$

这里s_1的含义是，对于供养甲的资源而言，单位数量乙（相对n_2）的消耗率为单位数量甲（相对n_1）消耗的s_1倍，类似的，甲的存在也影响了乙的增长，乙的方程应该改为

$$y'(t)=r_2x(1-s_2\frac{x}{n_1}-\frac{y}{n_2}) \tag{27-44}$$

给定种群的初始值为

$$x(0)=x_0,\ y(0)=y_0 \tag{27-45}$$

及参数r_1,r_2,s_1,s_2,n_1,n_2后，方程(27-43)，(27-44)确定了两种群的变化规律，因其解析解不存在，试用数值解法研究以下问题：

(1) 设$r_1=r_2=1$，$n_1=n_2=100$，$s_1=0.5$，$s_2=2$，$x_0=y_0=10$，计算$x(t),y(t)$，画出它们的图形，说明时间t充分大以后$x(t),y(t)$的变化趋势（人们今天看到的已经是自然界长期演变的结果）。

(2) 改变r_1,r_2，x_0，y_0,但s_1,s_2不变（或保持$s_1<1,s_2>1$）并分析所得的结果，若$s_1=1.5(>1)$，$s_2=0.7(<1)$，再分析结果，由此你得到什么结论，请用各参数生态学上的含义作出解释。

(3) 试验当$s_1=0.8(<1)$，$s_2=0.7(<1)$时会有什么结果；当$s_1=1.5(>1)$，$s_2=1.7(>1)$又会出现什么结果，能解释这些结果吗？

实验二十八　矩阵特征值问题的数值解法

工程技术中的振动问题和稳定性问题以及微分方程的求解问题等，往往需要计算矩阵(指方阵)的特征值和特征向量。设A为n阶方阵，所谓A的特征值问题是求数λ（一般是复数）和非零向量$\boldsymbol{x}$，使

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$$

数λ叫做矩阵A的一个特征值，而非零向量x是相应的特征向量。这个问题等价于求使方程组$(A-\lambda I)\boldsymbol{x}=0$有非零解的数$\lambda$，与相应的非零解向量$\boldsymbol{x}$。

如何求出特征值λ呢？当A的阶数很低时，可以先求出特征多项式$\det(A-\lambda I)$的展开式$a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0$，然后用实验二十四中介绍的解高次方程的数值方法求出特征多项式的根。当方程次数很高时求根极为困难，所以这种做法效果不好。另外，在很多实际问题中，具体要求也有不同。有些只要求矩阵A的绝对值最大的特征值及其相应的特征向量。目前求特征值和特征向量比较有效的方法是迭代法和变换法。

28.1　乘幂法

28.1.1　乘幂法

设n阶矩阵A的n个特征值满足

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|\geqslant 0 \tag{28-1}$$

并且有对应的n个线性无关的特征向量$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$（即矩阵$A$可对角化）。其中，模最大的特征值$\lambda$，称为主特征值，对应的特征向量$\boldsymbol{x}_1$，称为主特征向量。在上述条件下，显然$\lambda_1$为非零单实根，$\boldsymbol{x}_1$为实向量。乘幂法就是求矩阵主特征值及相应的特征向量的一种基本方法。

乘幂法或简称幂法，它的基本思想是，对于给定的非零实向量$\boldsymbol{v}_0\in R^n$，用矩阵A对$\boldsymbol{v}_0$连续左乘，构造迭代过程

$$\boldsymbol{v}_k=A\boldsymbol{v}_{k-1}=A^k\boldsymbol{v}_0,\quad k=1,2,\cdots \tag{28-2}$$

按特征向量的假设条件，$\boldsymbol{v}_0$可表示为$\boldsymbol{v}_0=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$，从而

$$\boldsymbol{v}_k=A^k\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{x}_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i^k\boldsymbol{x}_i=\lambda_1^k\left[\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\boldsymbol{x}_i\right]$$

若记$(\boldsymbol{x}_i)_l$为$\boldsymbol{x}_i$的第l个分量，则有

$$\frac{(\boldsymbol{v}_{k+1})_l}{(\boldsymbol{v}_k)_l}=\lambda_1\frac{\alpha_1(x_1)_l+\sum\limits_{i=2}^{n}\alpha_i\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1}(\boldsymbol{x}_i)_l}{\alpha_1(x_1)_l+\sum\limits_{i=2}^{n}\alpha_i\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k}(\boldsymbol{x}_i)_l}$$

如果$\alpha_1 \neq 0$以及$(x_1)_l \neq 0$，那么由条件（28-1）可知，当k充分大时有

$$v_k \approx \lambda_1^k \alpha_1 x_1, \quad \frac{(v_{k+1})_l}{(v_k)_l} \approx \lambda_1 \tag{28-3}$$

因此特征向量可以相差任意非零常数倍，故（28-3）式的第一式表明，当k充分大时v_k近似于主特征向量。（28-3）式的第二式表明，当k充分大时，相邻两次迭代向量v_{k+1}与v_k的对应非零分量的比值近似于主特征值。

迭代过程（28-2）式为幂法的原始形式，它并不实用。这是因为，当$|\lambda_1|<1$时，v_k趋于零向量，当$|\lambda_1|>1$时v_k的非零分量无界，所以计算时会出现下溢或上溢。为了能在实际计算时避免这一缺陷，应该在迭代的每一步使向量“标准”化，即任意给出$v^{(0)} \neq 0$，令$u^{(0)} = v^{(0)}$，再反复计算下式

$$\begin{cases} v^k = Au^{(k-1)} \\ u^k = v^k / \max\left(v^{(k)}\right)' \end{cases} \quad k = 1,2,\cdots \tag{28-4}$$

这里，$\max(v)$是向量v按模最大的分量，比如$v=(1,-3,2)^T$，则$\max(v)=-3$。

假设A为实矩阵，其特征值满足$|\lambda_1|>|\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|$，向量序列$\{u^{(k)}, v^{(k)}\}$，由（28-4）式确定，则$\max(v^{(k)}) \to \lambda_1, u^{(k)} \to x_1/\max(x_1)$。

用乘幂法计算矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

绝对值最大的特征值及其对应的特征向量。

解：取 $u_0 = v_0 = (1,1,1)^T$，用（28-4）式进行迭代，计算结果见表 28-1。

表 28-1　计算结果

k	$u_1^{(k)}$	$u_2^{(k)}$	$u_3^{(k)}$	λ_k
0	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000
1	1.00000000	0.00000000	1.00000000	1.00000000
2	1.00000000	-1.00000000	1.00000000	2.00000000
3	-0.75000000	1.00000000	-0.75000000	-4.00000000
4	-0.71428567	1.00000000	-0.71428567	3.50000000
5	-0.70833343	1.00000000	-0.70833343	3.42856976
6	-0.70731699	1.00000000	-0.70731699	3.41666603
7	-0.70714301	1.00000000	-0.70714301	3.41463280
8	-0.70711291	1.00000000	-0.70711291	3.41428566
9	-0.70710796	1.00000000	-0.70710796	3.41422462
10	-0.70710689	1.00000000	-0.70710689	3.41421589

由表 28-1 可知，迭代到 10 次时，可得$\lambda_1 \approx 3.4142$，对应的特征向量为

$$v_1 \approx (-0.70710689, 1.00000000, -70710689)^{\mathrm{T}}$$

A 的精确特征值及特征向量为

$$\lambda_1 = 2+\sqrt{2} = 3.414213562\cdots,$$

$$\boldsymbol{v}_1 = (-1,\sqrt{2},-1) = \sqrt{2}(-0.7071067\cdots,1,-0.7071067\cdots)$$

由此可知，迭代 10 次时，求得的特征值有 5 位有效数字，而特征向量有 6 位有效数字。

练习 1 用乘幂法求下列矩阵的主特征值和主特征向量。

(1) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 8 & 8 & 4\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$　　(2) $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -4\\ -2 & 6 & -2\\ -4 & -2 & 3\end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix}-4 & 9 & 16\\ 2 & -2 & -4\\ -4 & 7 & 12\end{pmatrix}$　　(4) $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 3\\ -4 & 6 & 3\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$

练习 2 选择不同的迭代初始向量 $\boldsymbol{v}_0$，对练习 1 中的问题进行研究。请回答初始向量 $\boldsymbol{v}_0$ 的选取对迭代次数是否有影响？并设法找到一定的规律。

练习 3 比较练习 1 中用乘幂法求各矩阵的主特征值的迭代速度，并解释其原因。

28.1.2 雷利（Rayleigh）商加速法

由线性代数的知识，当 A 是对称矩阵时，A 的特征值 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ 所对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 可以组成规范化正交组，即 $(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$，且当 $\boldsymbol{x}$ 为任意非零向量时，有

$$\lambda_n \leqslant \frac{(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} \leqslant \lambda_1$$

其中，$\dfrac{(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ 称为雷利商，并有 $\lambda_1 = \max\dfrac{(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$。

设用乘幂法计算特征值 λ_1，已经迭代到第 k 次，则有

$$\boldsymbol{u}_k = \frac{A^k u_0}{\max(A^k \boldsymbol{u}_0)}\quad,\quad v\boldsymbol{u}_{k+1} = A\boldsymbol{u}_k = \frac{A^{k+1}}{\max(A^k \boldsymbol{u}_0)}$$

对 $\boldsymbol{u}_k$ 作一次雷利商，得

$$\frac{(A\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_k)}{(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_k)} = \frac{(A^{k+1}u_0, A^k u_0)}{(A^k u_0, A^k u_0)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \lambda_j^{2k+1}}{\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \lambda_j^{2k}} = \lambda_1 + o\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)$$

上式说明，如果每迭代一次，就用雷利商加速一次，可以使收敛速度提高很多。

练习 4 对实验 1 的矩阵用雷利商计算，并比较两种方法的迭代速度。

28.2 计算实对称矩阵特征值的雅可比法

雅可比（Jacobi）方法是一种求实对称矩阵全部特征值及相应特征向量的方法。1846 年由雅可比首先给出。它的基本思想是，通过一系列的正交相似变换，化实对称矩阵 A 为对角矩阵。这个对角矩阵的对角线元素就是 A 的特征值，而这些正交变换阵的乘积阵的各列就是相

应的特征向量。

28.2.1 古典雅可比法

先设 A 为二阶对称矩阵，$A=\left(a_{ij}\right)_{2\times2}$，且 $a_{12}=a_{21}\neq 0$，令

$$R=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

R 叫旋转阵，显然对任何 θ，R 为正交阵。令

$$A^{(1)}=RAR^{T}=(a_{j}^{(1)})_{2\times2}$$

由矩阵的乘法，有

$$\begin{cases}a_{11}^{(1)}=a_{11}\cos^2\theta+2a_{12}\sin\theta\cos\theta+a_{22}\sin^2\theta\\ a_{22}^{(1)}=a_{11}\sin^2\theta-2a_{12}\sin\theta\cos\theta+a_{22}\cos^2\theta\\ a_{12}^{(1)}=a_{21}^{(1)}=(a_{22}-a_{11})\sin\theta\cos\theta+a_{22}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\end{cases}\tag{28-5}$$

由（28-5）式的最后一式可知，当 θ 满足 $\tan 2\theta=\dfrac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$ 时，有 $a_{21}^{(1)}=a_{12}^{(1)}=0$。这就是说，$A$ 为二阶实对称矩阵时，用适当的旋转相似变换一次就可化 A 为对角阵。当 A 为 n 阶实对阵矩阵时，要用到 n 阶旋转阵

$$R(i,j,\theta)=\begin{array}{c}\begin{matrix}&&p&&q&&\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 &&&&&&\\ &\ddots&&&&&\\ &&\cos\theta&\cdots&\sin\theta&&\\ &&-\sin\theta&\cdots&\cos\theta&&\\ &&&&&\ddots&\\ &&&&&&1\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}\\ \\ \\ p\\ q\\ \\ \\ \end{matrix}$$

它与 n 阶单位阵的区别仅在于如上式右端标出的 4 个元素，易知 $R(p,q,\theta)$ 为正交阵。

雅可比方法就是用一系列的旋转相似变换逐步化 A 为对角阵。具体地说，令 $A_0=A,A_1=R_1A_0R_1^{\mathrm{T}},\cdots,A_k=R_kA_{k-1}R_k^{\mathrm{T}},\cdots$。恰当地选取每个旋转阵 R，就可以使用 A_k 趋于对角阵。

令 $R_{k+1}=R(p,q,\theta)$，由 R_{k+1} 的特殊形式可知 A_{k+1} 与 A_k 的差别仅在 p,q 行及 p,q 列的元素，由矩阵的乘法有

$$\begin{cases}a_{pj}^{(k+1)}=a_{pj}^{(k)}\cos\theta+a_{qj}^{(k)}\sin\theta=a_{jp}^{(k+1)}\\ a_{qj}^{(k+1)}=-a_{pj}^{(k)}\sin\theta+a_{qj}^{(k)}\cos\theta=a_{jq}^{(k+1)} \qquad j\neq p,q\\ a_{pp}^{(k+1)}=a_{pp}^{(k)}\cos^2\theta+2a_{qp}^{(k)}\sin\theta\cos\theta+a_{qq}^{(k)}\sin^2\theta\\ a_{qq}^{(k+1)}=a_{pp}^{(k)}\sin^2\theta-2a_{pq}^{(k)}\sin\theta\cos\theta+a_{qq}^{(k)}\cos^2\theta\\ a_{pq}^{(k+1)}=\left(a_{qq}^{(k)}-a_{pp}^{(k)}\right)\sin\theta\cos\theta+a_{qq}^{(k)}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=a_{qp}^{(k+1)}\\ a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)},\quad i,j\neq p,q\end{cases}\tag{28-6}$$

由（28-6）式易知

$$\left(a_{pj}^{(k+1)}\right)^2+\left(a_{qj}^{(k+1)}\right)^2=\left(a_{pj}^{(k)}\right)^2+\left(a_{qj}^{(k)}\right)^2,\quad j\neq p,q$$

$$\left(a_{ij}^{(k+1)}\right)^2=\left(a_{ij}^{(k)}\right)^2,\quad i,j\neq p,q$$

于是，$\left(a_{pp}^{(k+1)}\right)^2+\left(a_{qq}^{(k+1)}\right)^2+2\left(a_{pq}^{(k+1)}\right)^2=\left(a_{pp}^{(k)}\right)^2+\left(a_{11}^{(k)}\right)^2+2\left(a_{pq}^{(k)}\right)^2$。若 $a_{qp}^{(k)}\neq 0$，而选 θ 使 $a_{pq}^{(k+1)}=0$，即 θ 满足

$$\tan 2\theta=\frac{2a_{pq}^{(k)}}{a_{pp}^{(k)}-a_{qq}^{(k)}}\tag{28-7}$$

则有，$\left(a_{pp}^{(k+1)}\right)^2+\left(\bar{a}_{qq}^{(k+1)}\right)^2=\left(a_{pp}^{(k)}\right)^2+\left(a_{qq}^{(k)}\right)^2+2\left(a_{pq}^{(k)}\right)^2$。令

$$D(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2\quad,\quad S(A)=\sum_{i\neq j}a_{ij}^2$$

由于 $a_{ii}^{(k+1)}=a_{ii}^{(k)},i\neq p,q$，所以

$$D(A_{k+1})=D(A_k)+2(a_{qp}^{(k)})^2,S(A_{k+1})=S(A_k)-2(a_{pq}^{(k)})^2$$

这就是说只要 $a_{pq}^{(k)}\neq 0$，那么按上述方法构造的旋转阵 $R(p,q,\theta)$ 对 A_k 变换之后就会使对角线元素平方和增加，而非对角线元素平方和减小。但不要认为经过有限次这样的变换就可以将 A 化为对角阵，事实上若在某一步变换时将 a_{lm} 化为零，在以后的变换中 a_{lm} 有可能变为非零。古典雅可比法总是在每一变换中选 A_k 的非对角元素，按模的最大者充当 $a_{pq}^{(k)}$（称为主元），可以证明，当 $k\to\infty$ 时有 $A_k\to\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$

当 A 的阶数较高时，用雅可比方法需要迭代很多次（即变换很多次），因此每一步迭代中应尽量减少计算量，下面具体给出每一步迭代计算的方法。

(1) 确定旋转阵 $R(p,q,\theta)$

设 $a_{pq}^{(k)}\neq 0$，由（28-7）式有 $\tan 2\theta=\dfrac{2a_{pq}^{(k)}}{a_{pp}^{(k)}-a_{qq}^{(k)}}$，这里限定 $|\theta|\leqslant\dfrac{\pi}{4}$。

当 $a_{pp}^{(k)}=a_{qq}^{(k)}$ 时，取 $\theta=\mathrm{sign}\left(a_{pq}^{(k)}\right)\dfrac{\pi}{4}$，所以

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\mathrm{sign}\left(a_{pq}^{(k)}\right)\cos\theta\end{cases}\tag{28-8}$$

当 $a_{pp}^{(k)}\neq a_{qq}^{(k)}$ 时，令

$$\tan 2\theta=\frac{1}{c}=\frac{2a_{pq}^{(k)}}{a_{pp}^{(k)}-a_{qq}^{(k)}}\tag{28-9}$$

则，$\tan^2\theta+2\cot\theta-1=0$，$\tan\theta=-c\pm\sqrt{c^2+1}$。

为了避免数值接近的数相减，取

$$t=\tan\theta=\frac{\mathrm{sign}(c)}{|c|+\sqrt{c^2+1}}\tag{28-10}$$

最后得

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\quad,\quad\sin\theta=t\cos\theta\tag{28-11}$$

(2) 旋转阵乘积的计算

令$A_0 = A$, 则$A_1 = R_1 A_0 R_1^{\mathrm{T}}$，$A_k = R_k A_{k-1} R_k^{\mathrm{T}} = R_k R_{k-1} \cdots R_1 A_0 R_1^{\mathrm{T}} \cdots R_{k-1}^{\mathrm{T}} R_k^{\mathrm{T}}$。记$H_k^{\mathrm{T}} = R_1^{\mathrm{T}} R_2^{\mathrm{T}} \cdots R_k^{\mathrm{T}}$，约定$H_0^{\mathrm{T}} = E$，于是

$$
\begin{aligned}
&H_k^{\mathrm{T}} = H_{k-1}^{\mathrm{T}} R_k^{\mathrm{T}} \quad , \quad k = 1, 2 \cdots \\
&A_k = H_k A_0 H_k^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
\tag{28-12}
$$

由于$k \to \infty$时，$A_k \to$对角阵，所以H_k^{T}的各列就是近似特征向量，H_k^{T}的计算可用递推关系式（28-12），其元素关系如下：

$$
\begin{cases}
\overset{(k)}{h_{ip}} = \overset{(k-1)}{h_{ip}} \cos\theta + \overset{(k-1)}{h_{iq}} \sin\theta \\
\overset{(k)}{h_{iq}} = -\overset{(k-1)}{h_{ip}} \sin\theta + \overset{(k-1)}{h_{iq}} \cos\theta \qquad i = 1, 2 \cdots, n \\
\overset{(k)}{h_{ij}} = \overset{(k-1)}{h_{ij}} \quad , \quad j \neq p, q
\end{cases}
\tag{28-13}
$$

古典雅可比法的计算步骤是：

(1) 选主元，即确定$a_{pq}^{(k)}$，使$\left|a_{pq}^{(k)}\right| = \max\limits_{\substack{2 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant i-1}} \left|a_{ij}^{(k)}\right|$；

(2) 按（28-8）式或（28-11）式计算$\sin\theta$和$\cos\theta$；

(3) 按（28-13）式计算新正交阵H_{k+1}^{T}的元素；

(4) 按（28-6）式计算A_{k+1}的元素，其中$a_{pq}^{(k+1)}, a_{qp}^{(k+1)}$令其为零。

(5) 以上各步重复执行，直至$\sum\limits_{\substack{i=2 \\ j<i}}^{n} a_{ij}^2 < \varepsilon$，其中$\varepsilon$是给定的值。

实验 2 用古典雅可比法求

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

的特征值、特征向量。

解：用选绝对值最大的非对角元素消零，取$\theta = -\dfrac{\pi}{4}, \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，计算得

$$
A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0.7071 \\ 0 & 1 & -0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 & 2 \end{pmatrix}
$$

具体结果见表 28-2。

于是从表 28-2 中可得，$\lambda_1 \approx a_{11}^{(5)} = 3.4142, \lambda_2 \approx a_{22}^{(5)} = 1.9998, \lambda_3 \approx a_{33}^{(5)} = 0.5859$。

$$
U \approx R_{12} R_{13} R_{23} R_{31} R_{21} = \begin{pmatrix} 0.5000 & 0.7071 & 0.5000 \\ -0.7071 & 0 & 0.7071 \\ 0.5000 & -0.7071 & 0.5000 \end{pmatrix}
$$

即

表 28-2　雅可比法计算特征值、特征向量

n	矩阵 A_n	$a_{ij}^{(n)}$	$\sin\theta_n$, $\cos\theta_n$	R_n
0	$A_0=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$	$a_{12}^{(0)}=-1$	$\sin\theta_0=0.7071$ $\cos\theta_0=0.7071$	$R_{12}=\begin{pmatrix}0.7071 & 0.7071 & 0\\ -0.7071 & 0.7071 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
1	$A_1=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0.7071\\ 0 & 1 & -0.7071\\ 0.7071 & -0.7071 & 2\end{pmatrix}$	$a_{13}^{(1)}=0.7071$	$\sin\theta_1=0.4597$ $\cos\theta_1=0.8880$	$R_{11}=\begin{pmatrix}0.8880 & 0 & -0.4597\\ 0 & 1 & 0\\ 0.4597 & 0 & 0.8880\end{pmatrix}$
2	$A_2=\begin{pmatrix}3.3660 & -0.3250 & 0\\ -0.3250 & 1 & -0.6279\\ 0 & -0.6279 & 1.6339\end{pmatrix}$	$a_{23}^{(2)}=-0.6269$	$\sin\theta_2=0.5242$ $\cos\theta_2=0.8516$	$R_{23}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.8516 & -0.5242\\ 0 & 0.5242 & 0.8516\end{pmatrix}$
3	$A_2=\begin{pmatrix}3.360 & -0.1703 & -0.2768\\ -0.1703 & 2.0204 & 0\\ -0.2768 & 0 & 0.6135\end{pmatrix}$	$a_{31}^{(3)}=-0.2768$	$\sin\theta_3=0.0990$ $\cos\theta_3=0.0995$	$R_{31}=\begin{pmatrix}0.9950 & 0 & 0.0990\\ 0 & 1 & 0\\ -0.0990 & 0 & 0.9950\end{pmatrix}$
4	$A_4=\begin{pmatrix}3.3935 & -0.1695 & 0\\ -0.1695 & 2.0204 & -0.0168\\ 0 & -0.0168 & 0.5859\end{pmatrix}$	$a_{21}^{(4)}=-0.1695$	$\sin\theta_4=0.1207$ $\cos\theta_4=0.9926$	$R_{21}=\begin{pmatrix}0.9926 & 0.1207 & 0\\ -0.1207 & 0.9926 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
5	$A_5=\begin{pmatrix}3.4142 & 0 & 0.0020\\ 0 & 1.9998 & -0.0167\\ 0.0020 & -0.0167 & 0.5859\end{pmatrix}$			

$$u_1=\begin{pmatrix}0.5000\\-0.7071\\0.5000\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}0.7071\\0\\-0.7071\end{pmatrix},\quad u_3=\begin{pmatrix}0.5000\\0.7071\\0.5000\end{pmatrix}$$

分别为特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$所对应的特征向量。矩阵$A$的精确特征值为

$$\lambda_1=2+\sqrt{2}\approx 3.4142,\lambda_2=2,\lambda_3=2-\sqrt{2}\approx 0.5858$$

练习 5 在用雅可比法计算时，每次迭代都首先要在全部非对角元素选主元，若A的阶数较高，对这项工作的耗时很多，请设计一个改进的算法。

练习 6 如果A是可对角化的，即存在矩阵X使得$X^{-1}AX=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，而且有$\lambda_1=\lambda_2\geqslant|\lambda_3|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$，分析乘幂法是否有效。

练习 7 试验不同的(p,q)选取方法对于算法的影响。

28.3 值得进一步研究的问题

问题 1 （研究另外几种情况下的乘幂法）构造可对角化的矩阵$A\in R^{n\times n}$，它的特征值满足

(1) $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r$，$|\lambda_1|>|\lambda_{r+1}|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$

(2) $\lambda_1=-\lambda_2$，$|\lambda_1|>|\lambda_3|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$

(3) $\lambda_1=\bar{\lambda}_2$，$|\lambda_1|>|\lambda_3|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$

对A实行幂方法，有什么结果。

问题 2 （分析“三维”雅可比算法的数值性质）雅可比算法可以看成选择(l,r)和A的2×2阶子矩阵$A=(l,r)=\begin{pmatrix}a_{l,l}&a_{l,r}\\a_{r,l}&a_{r,r}\end{pmatrix}$（当然，它也是对称的），计算出$A(l,r)$的特征值和特征向量，然后把它对角化。重复进行这个过程直到收敛。

把上面的方法改为选择(l,r,k)和A的3×3阶子矩阵

$$A(l,r,k)=\begin{pmatrix}a_{l,l}&a_{l,r}&a_{l,k}\\a_{r,l}&a_{r,r}&a_{r,k}\\a_{k,l}&a_{k,r}&a_{k,k}\end{pmatrix}$$

类似地建立“三维”雅可比算法并用数值例子说明算法有效或无效。

试验不同的(l,r,k)选取方法对于算法的影响，把“三维”雅可比算法改成“p维”的算法如何？p为何值时最为有效？

问题 3 （雷利商算法的数值实验）假设对称矩阵A的特征值是$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，雷利商算法是：

(1) 取$x_0\in R^n$为某个特征向量的近似，且$\|x_0\|_2=1$，对于$k=0,1,2,\cdots$，

$$\rho_k=(Ax_k,x_k)$$

(2) 果$A-\rho_k E$奇异，则得到了A的一个特征值，计算特征向量，停止。

否则$y_{k+1}=(A-\rho_k E)^{-1}x_k,x_{k+1}=y_{k+1}/\|y_{k+1}\|$。转向（2）。

选择一个特征值已经知道的矩阵，实验上述算法。

实验二十九　回归分析

在现实问题中处于同一个过程中的一些变量往往是相互依赖和相互制约的，它们之间的相互关系大致可分为两种：

(1) 确定性关系——函数关系是初等数学及微积分学中研究的问题。例如，一个圆的半径 R 与周长 C 的关系可表示为：$C=2\pi R$。

(2) 非确定性关系——相关关系，这种关系表现为这些变量之间有一定的依赖关系，但这种关系并不完全确定，不能用函数形式来表达，这些变量其实是随机变量或至少其中有一个是随机变量。例如：身高 x 和体重 y 的关系，x 增加时，一般来说 y 也会增加。但由 x 并不能严格地决定 y。一般农作物的亩产量 y 与其播种量 x_1 施肥量 x_2 有联系，但 x_1、x_2 不能严格地决定 y 等。

这种变量间既互相联系但又不是严格决定的关系，称为相关联系。回归分析就是研究相关关系的一种重要的数理统计方法。利用回归分析，可以从变量的取值去估计作为因变量的一个随机变量的取值。具体地说，回归分析是在一组数据 (x_i, y_i)，$i=1,2,\cdots,n$ 的基础上，研究以下几个问题：

(1) 建立因变量 η 与自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之间的回归模型（经验公式）；

(2) 对回归模型的可信度进行检验；

(3) 判断每个自变量 $x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 对 η 的影响是否显著；

(4) 诊断回归模型是否适合这组数据；

(5) 利用回归模型对 η 进行预测与控制。

29.1　一元线性回归

只有一个自变量而且因变量与自变量间关系存在线性相关关系的回归分析称为一元线性回归。下面先看一个例子。

例 1　合金钢的强度 y 与钢材中碳的含量 x 有密切关系。为了冶炼出符合要求强度的钢，常常通过控制钢水中的碳含量来达到目的。为此需要了解 x 与 y 之间的关系。本例收集数据见表 29-1。

表 29-1　数据表

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x(%)	0.03	0.04	0.05	0.07	0.09	0.10	0.12	0.15	0.17	0.20
y	40.5	39.5	41.0	41.5	43.0	42.0	45.0	47.5	53.0	56.0

29.1.1　散点图

为了看清其规律，在平面上取一个直角坐标系，把每个样本 (x_i, y_i) 标在这些坐标平面上

得到一个点。若样本容量为 n，则得到由 n 个点的散点图如图 29-1。

画散点图，是一种重要的整理数据的方法。通过它可初步了解两指标值的平均、散布与其关系的大致情况。

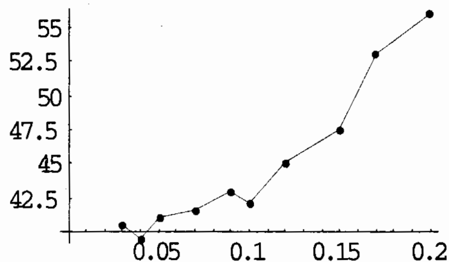


图 29-1 表 29-1 数据的散点图

由实验十八的讨论，我们知道两个变量间的关系用样本相关系数 r 来度量。设 $(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 表示 n 组观察数据。定义样本协方差

$$L_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$$

样本相关系数：$L_{xy}=\dfrac{L_{xy}}{\sqrt{L_{xx}L_{yy}}}$。其中 L_{xx}, L_{yy} 分别为样本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的方差。

$L_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$，$L_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$，$r_{xy}$ 度量了 x, y 两变量间线性相关程度。其取值范围为-1≤r≤1，由实验十八我们知道：

$r=\pm1$，完全线性相关；

$r=0$，无线性关系，即不相关；

$r>0$，x 和 y 正相关，即有一定的正线性趋势；

r 接近 1，x 和 y 间有强的正线性趋势；

$r<0$ ，x 和 y 负相关，即有一定的负线性趋势；

r 接近-1，x 和 y 间有强的负线性趋势。

29.1.2 模型

观察图 29-1 上数据的分布规律，可以发现：这些数据点散布在一直线附近，但又不全在一条直线上。我们可以认为 y 和 x 之间的关系由两部分组成，一部分是由于 x 的变化引起的 y 线性变化部分，记为 $a+bx$，另一部分是由其它一切随机因素引起的，记为 ε，则

$$y=a+bx+\varepsilon \tag{29-1}$$

在式（29-1）中，我们假定 x 是一般变量，其值是可以精确测量和严格控制的，a 和 b 是未知参数，ε 是不可观测的随机误差，假定 ε 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，从而

$$y\sim N(a+bx,\sigma^2)$$

对我们所获得的观测数据 $(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 来讲，通常还假定 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 间相互独立，从而得到一元线性回归的数学模型

$$y_i=a+bx_i+\varepsilon_i, i=1,2,\cdots,n$$

其中各ε_i独立同分布,其分布为$N(0,\sigma^2)$。称$E(y)=a+bx$为y关于x的回归函数，它在平均意义上表明了y与x之间的一种统计规律性。当x已知时，通过该式可以精确地算出$E(y)$，由于ε是不可控制的随机因素,通常就用$E(y)$作为y的估计,记作$\hat{y}$。

回归分析的首要任务是通过n组观察值$(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$，来估计$a$和$b$，常用最小二乘法或极大似然法进行估计。

若用$\hat{a},\hat{b}$分别记a,b的估计值，则称$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$为y关于x的一元线性回归方程，由于此方程的建立有赖于通过观察或实验积累的数据，有时也称为经验回归方程或经验公式。

29.1.3 参数 a,b 的估计

29.1.3.1 最小二乘估计

最小二乘法是用曲线和方程去拟合数据的主要方法。在一元线性回归问题中，由n个观察数据（如图 29-1 所示）$(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$，我们希望确定一条直线，也就是要确定$a$和$b$的估计值$\hat{a}$和$\hat{b}$使直线$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$尽可能好地拟合这些数据，由方程

$$\hat{y}=a+bx$$

当x取值x_i时，$\hat{y}_i$应取$a+bx_i$，而实际观察到的是y_i，这样就形成了偏差

$$\varepsilon_i=y_i-(a+bx_i)$$

自然对所有的x_i,y_i，若ε_i越小，则直线与所有实验数据拟合得越好。显然

$$Q(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2$$

刻画了所有观察值与回归直线的偏离程度。

所谓最小二乘法就是选择$\hat{a},\hat{b}$，使

$$Q(\hat{a},\hat{b})=\min_{(a,b)}Q(a,b)$$

以这样的$\hat{a},\hat{b}$作为(a,b)的估计值，所得回归直线$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$是在所有直线中，与点(x_i,y_i) $(i=1,\cdots,n)$的偏差平方和最小的一条直线。

由微积分中求极值的方法，可求得

$$\begin{cases}\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}\\ \hat{b}=\dfrac{L_{xy}}{L_{xx}}\end{cases}$$

其中$L_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2,L_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2,L_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$。

于是得到回归方程

$$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$$

实验 1 离婚人数的统计分析。根据美国的统计资料，从 1975 年——1980 年，6 年中的每年的离婚人数如表 29-2（单位：万人）：

表 29-2 每年的离婚人数

年份	1975	1976	1977	1978	1979	1980
人数	12.05	12.67	12.91	14.37	13.87	14.83

问离婚人数是否有逐年上升的趋势？如有，上升的幅度是多少？

解：令 y 表示第 x 年的离婚人数，若逐年上升的幅度一样，y 就应是 x 的线性函数：

$$y = a + bx$$

b 的大小反映了平均增加的离婚人数。

由于各种因素的作用，y 与 $a+bx$ 并不相等，用 ε 表示相应的误差，于是有

$$y = a + bx + \varepsilon \text{，} \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

画散点图如图 29-2。

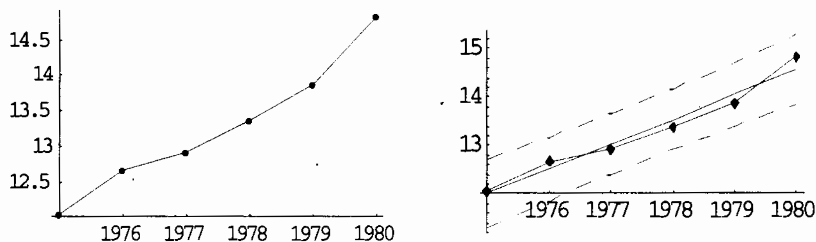


图 29-2 表 29-2 数据的散点图（左）与回归曲线（右）

下面用几种方法从已知的六组数据 (x_i, y_i) 来估计 a,b。

(1) 只用首尾两点 (1975,12.05)，(1980,14.83) 定出直线，由两点式得直线方程为

$$y = 0.58x - 1133.45 \tag{29-a1}$$

(2) 用前两点的中点 (1975.5,12.36) 和末两点的中点 (1979.5,14.35) 求直线方程。此时连接这两个中点的方程为

$$y = 0.5x - 975.39 \tag{29-a2}$$

(3) 用前三个点的重心和后三个点的重心求直线方程为

$$y = 0.61x - 1192.82 \tag{29-a3}$$

(4) 用最小二乘法，得直线方程为

$$y = 0.542x - 1058.32 \tag{29-a4}$$

练习 1 试用随机模拟方法来比较一下四组估计，模拟步骤如下：

1. 给定一条直线 $y = a + bx, a, b$ 是事先取定的常数，对每一个确定的 x_i，算得 $a + bx_i$，再由正态随机数生成一个误差 ε_i，$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$，$\sigma^2$ 已知，将 ε_i 加到 $a + bx_i$ 就生成 $y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$，当 $x = 1975, \cdots, 1980$ 取 6 个数时，用上述方法得到模拟的 6 个 y 值。
2. 重复 1 中的模拟方法，得到 500 组模拟的 6 年的数据。
3. 对每一组 6 年的数据分别用上述四种方法，求 x 的系数 b 的估计值，依次记为，$\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4$。
4. 画直方图，与 b 的真实值比较。

实验 2 建立回归方程。若我们观察得到 10 组数据 $(x_1, y_1), \cdots, (x_{10}, y_{10})$，如表 29-3。

表 29-3 数据表

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4.06	6.10	8.06	9.89	11.86	14.00	15.63	17.41	19.03	20.76

解：画出散点图如图 29-3。

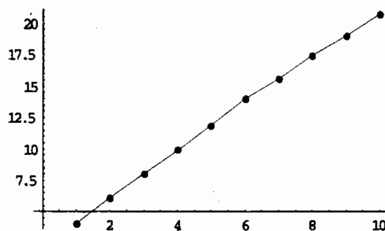


图 29-3　观测数据的散点图

现在来建立 y 对 x 的回归方程：$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$。用最小二乘法求 $\hat{a},\hat{b}$ 及方程。计算可得 $L_{xx}=-8371.5$, $L_{yy}=285.8$, $L_{xy}=-2889.6$。于是由

$$\begin{cases}\hat{a}=\hat{y}-\hat{b}\overline{x}\\ \hat{b}=\dfrac{L_{xy}}{L_{xx}}\end{cases}$$

得　$\hat{a}=2.431$　$\hat{b}=0.347$。所求回归方程为 $y=2.431+0.347x$。图形如图 29-4。

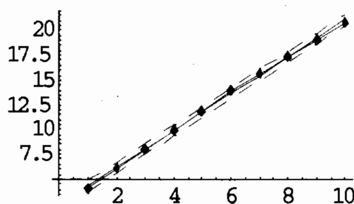


图 29-4　回归曲线图

29.1.3.2　极大似然估计

考虑到 $y_i \sim N(a+bx_i,\sigma^2)$　$i=1,2,\cdots,n$，故 y_i 的分布密度为

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i-a-bx_i)^2\right\}\quad i=1,2,\cdots,n$$

又因为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是相互独立的，所以它们的似然函数为

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i-a-bx_i)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2\right\}$$

由此式可知，使似然函数 L 取最大值的 a,b，也就是使函数 $Q(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2$ 取最小值的 a,b。因此 a,b 的极大似然估计量与其最小二乘估计量分别相等。

当 a,b 的极大似然估计量 $\hat{a},\hat{b}$ 已经求得时，求 σ^2 的估计量可以通过解似然方程

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{a}-\hat{b}x_i)^2=0$$

得到 σ^2 的极大似然估计量为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2$$

29.1.4 回归方程的显著性检验

从求一元线性回归方程系数的最小二乘估计公式可知，不管 y 与 x 之间是否有线性相关关系，只要给出了 n 对数据 $(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 总可求出 $\hat{a}$ 与 $\hat{b}$，从而写出回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$。然而这方程不一定有意义。

我们研究回归方程目的是寻找 y 与 x 之间的统计规律性，即要找出 $E(y)$ 随 x 变化的规律。在一元线性回归中，b_0 反应了 $E(y)$ 随 x 线性变化的变化率，若 $b=0$，就意味着 $E(y)$ 不随 x 而线性变化，那么我们给出的一元线性回归方程就没有意义。因而要讨论回归方程是否有意义，就是要检验假设

$$H_0: b=0 \tag{29-2}$$

是否为真。

注意到引起随机变量观测值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 不同的原因不外有两个，一是由于（29-2）式不真，从而 x 的变化引起了 $E(y)$ 的线性变化，当然在不同的 x 处 y 的观测值不同，二是还有其它一切因素（包括 x 变化时引起的 $E(y)$ 非线性变化的部分）造成的随机误差所致。

用总的偏差平方和

$$\mathrm{SST}=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2=L_{yy}$$

表示 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 之间的总的差异的大小。它可以被分解为两部分：

$$\begin{aligned}\mathrm{SST}&=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2\\&=\mathrm{SSR}+\mathrm{SSE}\end{aligned}$$

可以求得 $E(\mathrm{SSR})=\sigma^2+b^2L_{xx}$。

这表明当 $b=0$ 时，从平均意义上看，SSR 仅反映了随机误差引起的差异，否则还反映了 $E(y)$ 随 x 变化所引起的差异，因此称 SSR 为回归平方和。又由 $E(\mathrm{SSE})=(n-2)\sigma^2$，故从平均意义看，SSE 只反映了随机误差所引起的差异，称为残差平方和。

因此，当 H_0 为真时，$E(\mathrm{SSR})=E(\frac{\mathrm{SSE}}{n-2})=\sigma^2$。而 $b\neq 0$ 时，$E(\mathrm{SSR})>\sigma^2$，故考虑用下述统计量去检验假设：

$$F=\frac{\mathrm{SSR}}{\mathrm{SSE}/(n-2)}\sim F(1,n-2)$$

且从直观考虑，当 F 值较大时拒绝 H_0，即若给定显著性水平为 α（一般取 α 为小概率），如果 $F>F_\alpha(1,n-2)$，则拒绝 H_0，认为回归方程是有意义的。在实际工作中，也常用“样本相关系数” r 作检验 。当 $|r|>d$ 时，拒绝 H_0。这里

$$d=\sqrt{\frac{F_{1-2}(b\,n-2)}{n-2+F_{1-2}(1,n-2)}}$$

由于 r 比较直观，故有专门的表可供查询。

练习 2 下面是根据 16 名成年女子身高 x(cm)，下体长 y(cm)的数据。

表 29-4

身高/cm	143	145	146	147	149	150	153
下体长/cm	88	85	88	91	92	93	93

试根据实验数据建立回归方程，画出散点图及回归曲线，并检验回归方程是否有意义？

29.1.5 参数的区间估计

在一元线性回归函数中，b_1 称为回归系数，b_0 表示在 x=0 时 $E(y)$ 的值，称为回归常数，在 29.1.3 中已给出它们的点估计，而在实际问题中常常希望给出其估计的精度，亦即给出置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

由已有的一些结论：$\hat{b}_0 \sim N\left(b_0,(\frac{1}{n}+\frac{\overline{x}^2}{L_{xx}})\sigma^2\right)$，$\hat{b}_1 \sim N\left(b_1,\sigma^2/L_{xx}\right)$，$\frac{\text{SEE}}{\sigma^2}\sim x^2(n-2)$，$S^2=\frac{\text{SEE}}{n-2}$ 是 σ^2 的无偏估计，$\overline{y}$,SSR,SSE 相对独立，即可获得 b_0，b_1 的区间估计。若记 $\hat{b}_0,\hat{b}_1$ 的标准差为 $\sigma_{\hat{b}_0},\sigma_{\hat{b}_1}$，即

$$\sigma_{\hat{b}_0}=\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\overline{x}^2}{L_{xx}}\sigma} \quad ,\sigma_{\hat{b}_1}=\sigma/\sqrt{L_{xx}}$$

其估计值为

$$\hat{\sigma}_{\hat{b}_0}=\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\overline{x}^2}{L_{xx}}S} \quad ,\hat{\sigma}_{\hat{b}_1}=S/\sqrt{L_{xx}}$$

则 b_0，b_1 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间分别为

$$\left(\hat{b}_0-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\cdot\hat{\sigma}_{\hat{b}_1},\ \hat{b}_1+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\cdot\hat{\sigma}_{\hat{b}_1}\right)$$

$$\left(\hat{b}_1-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\cdot\sigma_{\hat{b}_1},\hat{b}_1+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\cdot\hat{\sigma}_{\hat{b}_1}\right)$$

29.1.6 预测

若回归方程有意义，可用它进行预测。所谓预测是指对给定的 $x=x_0$，由回归方程 $\hat{y}_0=\hat{a}+\hat{b}x_0$ 求相应的 y_0 的预测值 $\hat{y}_0$，并给出预测值的精度。所谓预测值的精度是希望求出一个 δ 值，使得

$$P\{|y_0-\hat{y}_0|\}<\delta=1-\alpha$$

其中 α 是预先给定的一个小的正数，$0<\alpha<1$，δ 越小就表示预测值的精度越高，并称 $(\hat{y}_0-\sigma,\hat{y}_0+\sigma)$ 为 y_0 的概率是 $1-\alpha$ 的预测区间。

下面来求 δ。可以证明

$$y_0-\hat{y}_0\sim N\left(0,(1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{L_{xx}})\sigma^2\right)$$

其中 $L_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，实际问题中 σ^2 未知，可用 $\delta^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}_i)^2\frac{1}{n-2}$ 去估计。由数理统计中有关分布的知识，可得

$$\frac{(n-2)\delta^2}{\sigma^2}\sim X^2(n-2)$$

若记 $h^2=1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{L_{xx}}$，由于 $y_0,\hat{y}_0,S^2$ 相互独立，可知 $\frac{(y_0-\hat{y}_0)}{Sh}\sim t(n-2)$。

于是对给定的置信度 $1-\alpha$，由 $P\left\{\left|\frac{y-y_0}{Sh}\right|<t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)\right\}=1-\alpha$，可知 $\delta=t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)Sh$。

可见，对给定的 α，n 越大，L_{xx} 越大，x_0 越靠近 $\bar{x}$，则 δ 越小。此时预测精度较高。因此，为提高预测精度，n 应该是足够大，$x_1,\cdots,x_n$ 不能太集中，在较靠近 $\bar{x}$ 处进行预测。如果在 $(\min x_i,\max x_i)$ 范围之外作预测，则精度就较差。安排试验时应注意，若 x_i 可取正负值时，应选取 $x_1,\cdots,x_n$ 使 $\bar{x}=0$。

29.1.7 可以化为一元线性回归的曲线回归问题

随机变量 y 与一般变量 x 之间的关系不一定都是线性的，例如，散点图如图 29-5(a)。

从上面可以看到变量 y 与 x 之间有一定的关系，但不是线性相关的关系。对这类问题确定回归方程形式的方法通常有两种。一是根据专业知识来确定，二是可以根据常用的函数的性质来确定。由于回归方程选择的不同，因而在曲线回归问题中带来了一些新的问题，比如回归方程中系数的估计问题。这里只研究可以化为一元线性回归的曲线回归。又比如不同的曲线回归方程的评价标准问题等等。

实验 3 一只红铃虫的产卵数 y 与温度 x 有关，表 29-5 是产卵数与温度的数据，其散点图见图 29-5。

表 29-5 数据表

i	温度 x_i	产卵数 y_i
1	21	7
2	23	11
3	25	21
4	27	24
5	29	66
6	32	115
7	35	325

建立 y 关于 x 的回归方程。

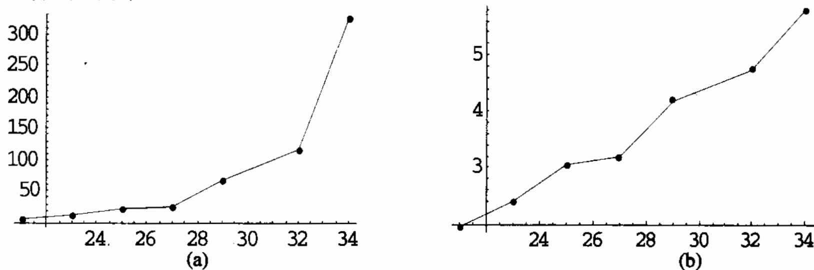


图 29-5 表 29-5 数据的散点图

(a) 原始数据；(b) $(x_i,\ln y_i)$。

解法 1：观察图 29-5 中的数据点的变化趋势，若取回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}_0+\hat{b}_1x^2$ 。可令 $X=x^2$ 化为一元线性回归方程，并求得

$$\hat{y}'=-202.5434+0.3670x^2 \tag{29-3}$$

解法 2：回归曲线如图 29-6(a)此外,回归方程还可取为如下形式

$$\hat{y}=\hat{b}_0\mathrm{e}^{\hat{b}_1x} \tag{29-4}$$

上式两边取对数有

$$\ln\hat{y}=\ln\hat{b}_0+b_1x \tag{29-5}$$

令

$$\hat{Y}=\ln\hat{y},\hat{a}=\ln\hat{b}_0 \tag{29-6}$$

则式(29-5)就是 Y 对 x 的一元线性方程：

$$\hat{Y}=\hat{a}+\hat{b}_1x \tag{29-7}$$

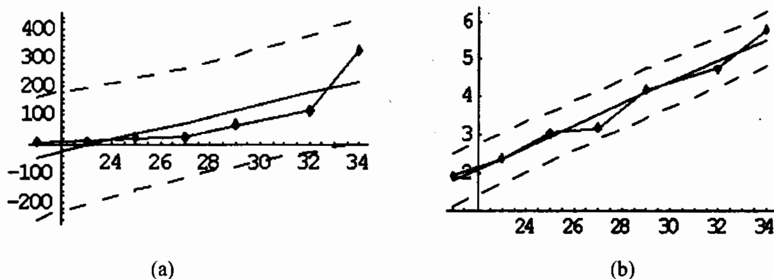


图 29-6　回归曲线

(a) 解法 1 的回归曲线；(b) 解法 2 的回归曲线。

当给出了 n 组观测值 $(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n$ 后，由式(29-6)可得到 $(x_i,Y_i)=(x_i,\ln y_i)$ $i=1,2,\cdots,n$ 。再用求参数 a,b 的最小二乘估计方法可得 $\hat{a}$ 与 $\hat{b}$ ，回归曲线如图 29-6(b)。

通过变换(29-6)，将(29-4)化为(29-7)的方法就是“线性化”方法。

那么解法 1 与解法 2 得到的回归方程哪一个好呢？仿照一元线性回归中的相关系数 r 及 σ 的估计 S，从不同角度提出如下两个准则：

准则 I　相关指数 R，定义为

$$R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$$

由于 $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 衡量了实测值与回归值之间的偏离，我们总希望此值小，故选 R^2 大的方程为好。

在实验 3 中，方程(29-3)对应的 R^2 为 $R^2=0.8023$，方程(29-4)对应的 R^2 为

$$R^2=1-\frac{1400.9363}{78141.4}=0.9821$$

两者比较，以(29-4)为好。

准则 II　剩余标准差 S，它定义为

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-2}}$$

以 S 小为好。

在实验 3 中，方程(29-3)与(29-4)对应的 S 分别为 16.74 与 55.58，可见以方程(29-3)为好。

在实验 3 中准则 I 与准则 II 的结果是一致的。事实上它们是从不同角度为人们提供信息，前者主要反映了曲线对数据点的拟合程度，后者反映了实测值与回归值间的偏差大小。

练习 3 表 29-6 列出在不同重量下弹簧的长度。

表 29-6 不同重量下弹簧的长度

重量 x/g	5	10	15	20	25	30
长度 y/cm	7.25	8.12	8.95	9.90	10.9	11.8

(1) 在直角坐标系下，作散点图并判断 y 关于 x 的相关关系是否线性；

(2) 求出 y 关于 x 的一元线性回归方程；

(3) 对所求得的回归方程作显著性检验；

(4) 求出 y 与 x 间的相关系数；

(5) 求回归系数的置信水平为 0.95 的置信区间；

(6) 在 $x=16$ 时求 y 的概率为 0.95 的预测区间。

练习 4 表 29-7 给出经过 x 分钟反应后未转化的物质的量 y 的值。

表 29-7 数据表

x	1	2	3	4	5	6
y	7.25	8.12	8.95	9.90	10.9	11.8

根据经验 y 与 x 间有如下形式的曲线回归方程

$$\hat{y}=\hat{b}_0\hat{b}_1^{\,x}$$

(1) 试通过线性化方法求出 $\hat{b}_0$ 与 $\hat{b}_1$；

(2) 求出相关指数 R 与剩余标准差 S；

(3) 给出 $y=4$ 时 y 的预测值。

29.2 多元线性回归

一元线性回归的一个自然推广是 x 为多元变量，形如

$$y=b_0+b_1x+\cdots+b_mx_m \tag{29-8}$$

其中 $m\geqslant 2$，或者更一般地

$$y=b_0+b_1f_1x+\cdots+b_mf_m(x) \tag{29-9}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_m)$，$f_j(j=1,\cdots,m)$ 是已知函数。这里 y 对回归系数 $b=(b_0,b_1,\cdots,b_m)$ 是线性的，称为多元线性回归。不难看出，对自变量 x 作变量代换，就可将式（29-9）化为式（29-8）的形式。所以下面以式（29-8）为多元线性回归的标准形进行讨论。

29.2.1 模型

在回归分析中自变量$x=(x_1,\cdots,x_n)$是影响因变量y的主要因素，是人们能控制或能观察的，而y还受到随机因素的干扰，可见合理地假定这种干扰服从零均值的正态分布，于是模型记作

$$\begin{cases} y=b_0+b_1x_1+\cdots+b_mx_m+\varepsilon \\ \varepsilon \sim N(0,\sigma^2) \end{cases} \tag{29-10}$$

其中σ未知，现得到n个独立观测数据$(y_i,x_{i1},\cdots,x_{im})$，$i=1,\cdots,n$　$n>m$。由式（29-10）得

$$\begin{cases} y_i=b_0+b_1x_{i1}+\cdots+b_mx_{im}+\varepsilon_i \\ \varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2) \quad i=1,\cdots,n \end{cases} \tag{29-11}$$

记

$$X=\begin{pmatrix} 1 & x_{11}\cdots x_{1m} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 1 & x_{n1} \quad x_{nm} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{29-12}$$

（29-11）式可表为

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}=X\boldsymbol{b}+\varepsilon \\ \varepsilon \sim N(0,\sigma^2) \end{cases} \tag{29-13}$$

29.2.2 参数估计

用最小二乘法估计模型（29-10）式中的参数$\boldsymbol{b}$。由（29-11）式这组数据的误差平方和为

$$Q(\boldsymbol{b})=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=(\boldsymbol{Y}-X\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}-X\boldsymbol{b}) \tag{29-14}$$

求$\boldsymbol{b}$使$Q(\boldsymbol{b})$最小，得到$\boldsymbol{b}$的最小二乘估计，记作$\hat{\boldsymbol{b}}$。可以推出

$$\hat{\boldsymbol{b}}=(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{29-15}$$

将$\hat{b}$代回原模型得到y的估计值

$$\hat{y}=\hat{b}_0+\hat{b}_1x_{m1}+\cdots+\hat{b}_mx_m \tag{29-16}$$

而这组数据的拟合值为$\hat{\boldsymbol{y}}=X\boldsymbol{b}$，拟合误差$e=\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{y}}$称为残差，可作为随机误差$\boldsymbol{\varepsilon}$的估计。

29.2.3 统计分析

下面不加证明地给出以下结论。

(1) $\hat{\boldsymbol{b}}$是$\boldsymbol{b}$的线性无偏最小方差估计。指的是$\hat{\boldsymbol{b}}$是y的线性函数，$\hat{\boldsymbol{b}}$的期望值等于$\boldsymbol{b}$，在$\boldsymbol{b}$的线性无偏估计中，$\hat{\boldsymbol{b}}$的方差最小。

(2) $\hat{\boldsymbol{b}}$服从正态分布，即

$$\hat{\boldsymbol{b}} \sim N(\boldsymbol{b},\sigma^2(X^TX)^{-1}) \tag{29-17}$$

(3) 对残差平方和SSE，$E(\mathrm{SSE})=(n-m-1)\sigma^2$，且

$$\frac{\mathrm{SSE}}{\sigma^2} \sim x^2(n-m-1) \tag{29-18}$$

由此得到σ^2的无偏估计

$$s^2 = \frac{\text{SSE}}{n-m-1} = \hat{\sigma}^2 \tag{29-19}$$

s称为剩余标准差。

(4) 对y的样本方差$\text{SST} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$进行分解，类似地有

$$\text{SST} = \text{SSE} + \text{SSR} \tag{29-20}$$

其中$\text{SSE} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2$为残差平方和，反映随机误差对$y$的影响；$\text{SSR} = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$为回归平方和，反映自变量对$y$的影响。

29.2.4 回归模型的假设检验

因变量y与自变量$x_1,\cdots,x_m$之间是否存在如模型（29-8）所示的线性关系是需要检验的。显然，如果所有$|\hat{b}_j|$ $(j=1,\cdots,m)$都很小，y与$x_1,\cdots,x_m$的线性关系就不明显，所以,可令原假设为H_0：$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$。

检验的方法与一元的情形类似，当H_0成立时，SSE与SSR满足

$$F = \frac{\dfrac{\text{SSR}}{m}}{\dfrac{\text{SSE}}{n-m-1}} \sim F(m, n-m-1) \tag{29-21}$$

在显著性水平α下有$1-\alpha$分位数$F_{1-\alpha}(m,n-m-1)$。若$F \leqslant F_{1-\alpha}(m,n-m-1)$，接受$H_0$；否则，拒绝$H_0$。

注意：拒绝H_0只说明y与x ,$\cdots,x_m$的线性关系不显著，可能存在非线性关系，如平方关系。

还有一些衡量y与x ,$\cdots,x_m$相关程度的指标，如用回归平方和在样本方差中的比值定义。

$$R^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} \tag{29-22}$$

$R \in [0,1]$称为相关系数，R越大，y与x ,$\cdots,x_m$相关关系越密切。通常，R大于0.8（或0.9）才认为相关关系成立。

29.2.5 回归系数的假设检验和区间估计

当上面的H_0被拒绝时，b_j不全为0，但是不能排除其中若干个等于0，所以应进一步做如下m个检验：

$$H_0^{(j)} \ : \ b_j = 0 \qquad (j=1,\cdots,m)$$

由于$\hat{b}_j \sim N(b_j, \sigma^2 C_{jj})$, 当$H_0^{(j)}$成立时有

$$t_j = \frac{\dfrac{\hat{b}_j}{\sqrt{C_{jj}}}}{\sqrt{\dfrac{\text{SSE}}{n-m-1}}} \sim t(n-m-1) \tag{29-23}$$

对给定的α，若$|t_j| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-m-1)$，接受$H_0^{(j)}$；否则，拒绝$H_0^{(j)}$。

若检验中有若干个$b_j=0$被拒绝($j=1,\cdots,k,\quad k<m$)。那么由于$\hat{b}$的各分量之间的相关性，不能一次去掉所有不显著的变量，每次只能去掉不显著的变量中$|t|$值最小的一个，之后重新建立少一个变量的回归方程，再重新逐一检验。若还有不显著的,再去掉一个,重新建立方程，通常希望做到方程中所含变量均为显著为止。

式(29-24)也可用于对b_j ($j=0,1,\cdots,m$)作区间估计，在置信水平$1-\alpha$下，b_j的置信区间为

$$[b_j-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-m-1)s\sqrt{C_{jj}}\,,b_j+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-m-1)s\sqrt{C_{jj}}]$$

其中$S=\sqrt{\frac{\text{SSE}}{n-m-1}}$。

29.2.6 利用回归模型进行预测

当回归模型和系数通过检验后，可由给定的$x_0=(x_{01},\cdots,x_{0m})$预测$y_0$，$y_0$是随机的，显然其预测值为

$$\hat{y}_0=\hat{b}_0+\hat{b}_1x_{01}+\cdots+\hat{b}_mx_{0m}$$

给定α可以算出y_0的预测区间，结果较复杂。但当n较大且x_{0i}接近平均值时，y_0的预测区间可简化为$[\hat{y}_0-z_{1-\frac{\alpha}{2}}S,\hat{y}_0+z_{1-\frac{\alpha}{2}}S]$，其中$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$是标准正态分布的$1-\frac{\alpha}{2}$分位数。

对y_0的区间估计方法可用于给出已知数据残差$e_i=y_i-\hat{y}_i\ (i=1,\cdots,n)$的置信区间，$e_i$服从均值为零的正态分布，所以若某个$e_i$的置信区间不包含零点，则认为这个数据是异常的，可予以剔除。

29.2.7 多项式回归

如果从数据的散点图上发现y与x呈较明显的二次（或高次）函数关系，或者用多元线性回归模型的效果不太好，可以选用多项式回归。

一元多项式回归模型：$y=a_1x^n+a_2x^{n-1}+\cdots+a_nx+a_{n+1}$

多元二项式回归模型：

(1) 纯二次：$y_0=b_0+b_1x_1+\cdots+b_mx_m+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_j^2$

(2) 交叉：$y_0=b_0+b_1x_1+\cdots+b_mx_m+\sum_{1\leq i\neq j\leq m}^{n}b_{ij}x_ix_j$

(3) 完全二次：$y_0=b_0+b_1x_1+\cdots+b_mx_m+\sum_{1\leq i,j\leq m}^{n}b_{ij}x_{ij}$

实验 4 年龄与运动能力

将 17 岁～29 岁的运动员每两岁一组分为 7 组，每组两人测量其旋转定向能力，以考察年龄对这种运动能力的影响。现得到一组数据如表 29-8，试建立二者之间的关系。

表 29-8　年龄与旋转定向能力测量数据

年龄	17	19	21	23	25	27	29
第一人	20.48	25.13	26.15	30.0	26.1	20.3	19.35
第二人	24.35	28.11	26.3	31.4	26.92	25.7	21.3

解：数据的散点图如图 29-7，明显地表现两端低中间高的形状，所以应拟合一条二次曲线。选用二次模型 $y=a_1x^2+a_2x+a_3$ 经计算可得

$$a_1=0.2003,\quad a_2=8.9782,\quad a_3=-72.2150$$

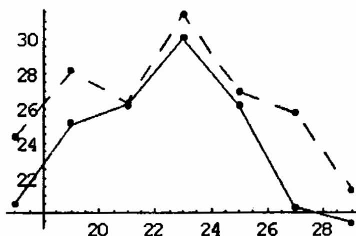


图 29-7　年龄与运动能力

作 x 与 y 的连续曲线，拟合的效果从图 29-8 可以直观地看出。

R^2 和 S 可作为衡量拟合的优劣的指标，计算得

$$R^2=0.6980\qquad S=2.0831$$

这是一个尚能接受的结果。

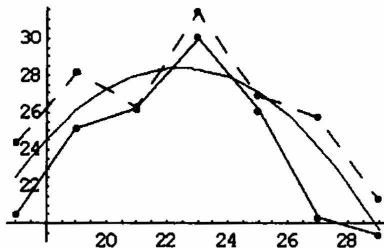


图 29-8　年龄与运动能力的拟合曲线

实验 5　某厂生产的一种电器的销售量 y 与竞争对手的价格 x_1 和本厂的价格 x_2 有关。表 29-9 是该商品在 10 个城市的销售记录，试根据这些数据建立 y 关于 x_1 和 x_2 的关系式，对得到的模型和系数进行检验。若某市本厂产品售价 160（元），竞争对手售价 170（元），预测商品在该市的销售量。

表 29-9　商品销售量 y 与价格 x_1 和 x_2

x_1/元	120	140	190	130	155	175	125	145	180	150
x_2/元	100	110	90	150	210	150	250	270	300	250
y/个	102	100	120	77	46	93	26	69	65	85

解：画出 (x_1,y)，(x_2,y) 各 10 个点的散点图如图 29-9，可以看出 y 与 x_2 有较明显的线性关系，而 y 与 x_1 之间的关系则难以确定。

我们将作几种尝试，用统计分析的方法来决定优劣。

(1) 设回归模型为

$$y=b_0+b_1x_1+b_2x_2 \tag{29-24}$$

经计算可得，$\hat{b}_0=66.5176$，$\hat{b}_1=0.4139$，$\hat{b}_3=-0.2698$，其中 b_0，b_1，b_2 的置信区间分别为，[-32.5060，165.5411]，[-0.2018，1.0296]，[-0.4611，-0.0785]，且 $R^2=0.6527$，$F=6.5786$。

与 F 对应的概率 $p=0.0247$，当 $P<\alpha$ 时，回归模型成立。

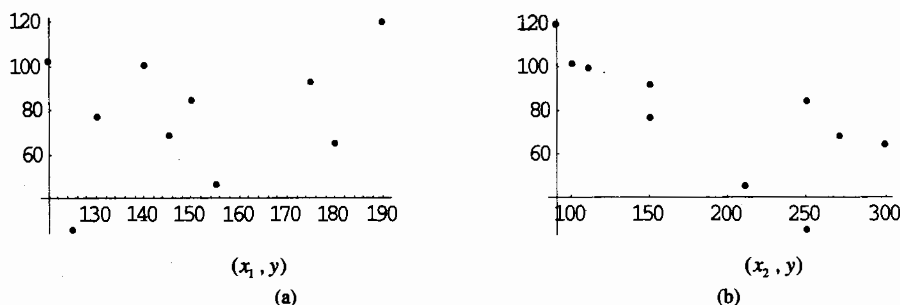


图 29-9　商品销售量 y 与价格 x_1 和 x_2

可以看出结果不是太好：$p = 0.0247$ 若取 $\alpha = 0.05$ 时回归模型可用，但取 $\alpha = 0.01$ 则模型不能用；$R^2 = 0.6527$ 较小；$\hat{b}_0, \hat{b}_1$ 的置信区间包含了零点。

(2) 用 x_1, x_2 的二次函数改进模型(29-24)。选择纯二次模型，设

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2$$

输入数据计算，可得

$$\hat{b}_0 = -312.5871, \hat{b}_1 = 7.2701, \hat{b}_2 = -1.7337, \hat{b}_{11} = -0.0228, \hat{b}_{22} = 0.0037$$

σ 的估计为 $s = 16.6436$。

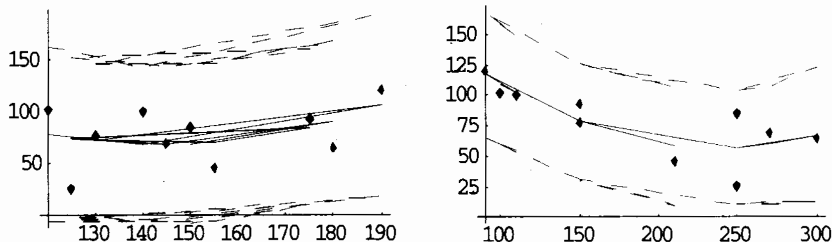


图 29-10　商品销售量与价格的回归曲线

可见以纯二次模型的剩余标准差为最小。

练习 5　用切削机床加工时，为适时地调整机床需测定刀具的磨损速度，现每隔一小时测量刀具的厚度一次，得到表 29-10 所例数据，试建立刀具厚度关于切削时间的回归模型，对模型和回归系数进行检验预测 15h 后刀具的厚度。

表 29-10　数据表

时间/h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
刀具厚度/cm	30.6	29.1	28.4	28.1	28.0	27.7	27.5	27.2	27.0	26.8	26.5

练习 6　电影院调查电视广告费用和报纸广告费用对每周收入的影响，得到表 29-11 所列的数据，建立回归模型并进行检验，诊断是否有异常点。

表 29-11　数据表

每周收入	96	90	95	92	95	95	94	94
电视广告费用	1.5	2.0	1.5	2.5	3.3	2.3	4.2	2.5
报纸广告费用	5.0	2.0	4.0	2.5	3.0	3.5	2.5	3.0

练习 7　表 29-12 是一组发动机性能试验的数据，在不同速度 S 下测量发动机产生的功率 P，试建立二者的关系式，并进行检验。(先画出散点图观察，以确定用什么模型)。

表 29-12 数据表

S	22	20	18	16	14	12	15	17	19	21	22	20
P	64.03	62.47	54.94	48.84	43.73	37.48	46.85	51.17	58.00	63.21	64.03	59.63
S	18	16	14	12	10.5	13	15	17	19	21	23	24
P	52.90	48.84	43.74	36.63	32.05	39.68	55.79	51.17	56.65	62.61	65.31	63.89

练习 8 一矿脉有 13 个相邻样本点，人为地设定一原点，观测的各样本点对原点的距离 x，与该样本点处某种金属含量 y 的一组数据如表 29-13 所列，画出散点图观察二者的关系，试建立合适的回归模型，如二次曲线、双曲线、对数曲线等。

表 29-13 数据表

x	2	3	4	5	7	8	10
y	106.42	109.20	109.58	109.50	110.00	109.93	110.49
x	11	14	15	15	18	19	
y	110.59	110.60	110.90	110.76	111.00	111.20	

29.3 值得进一步研究的问题

问题 1 控制问题。在一些实际问题中，往往要求 y 在一定范围内取值。例如要求某产品的质量指标 y 落在 (y_l, y_u) 间为合格品，这里 y_l, y_u 是两个已知的定值。问题是如何控制自变量 x 的值才能以 $1-\alpha$ 的概率保证产品合格，即要控制 x 使

$$P\{y_l < y < y_u\} = 1-\alpha$$

这里 α 是事先给定的小正数，$0<\alpha<1$。

以 29.1 中例 1 来讲，若要求以近似 0.95 以上的概率保证 y 落在 $(40, 50)$ 内，试问 x 应控制在什么范围内？（可求近似区间）

问题 2 拟合检验。若通过计算得出回归方程是显著的，是否表明 y 与 x 间确为线性相关关系，不可能是平方关系等。是否除 x 外不存在其它有影响的因素？

实验三十　π的近似计算

众所周知，圆周率π是平面上圆的周长与直径之比，它等于3.1415926…。古代人把3作为它的近似值，古希腊阿基米德（Archimedes）曾得到$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$。我国宋代的祖冲之得到$\pi$的近似值$\frac{22}{7}$（约率）和$\frac{355}{113}$（密率），后者化为小数后等于3.141592…，与π的准确值的误差在10^{-6}以下，迄今为止，$\frac{355}{113}$仍被认为是π的很好的近似值。

但是，后来的数学家们不满足于此，他们认为π不可能是有一个分式表示的有理数，并且在上个世纪，丹麦数学家康托（Contor）证明了π属于无理数中的"超越数"，即它不能成为系数为有理数的代数方程的解，因此π的真值是一个具有无穷多个没有规律的数字的小数。

对数学家来说，这个神妙莫测的数π是这样充满魅力，一直在漫长几千年的历史中大多数数学家都曾亲自计算过它，并出现了计算π位数的竞争。随着角的弧度制的采用，微积分的发现，特别是计算机的发明，人们计算π的位数大大地增加了。最近有报道说，π的近似值计算已提高到了千亿位以上。

但是，你是否知道怎样计算π的近似值？是否尝试过利用所知道的数学知识来计算π的近似值？本实验将介绍几种计算π的方法。

30.1　利用多边形的面积求π

当圆的半径为1时，其面积恰好为π，因此π必介于单位圆的内接多边形面积与外切多边形面积之间，如图30-1所示。因单位圆的内接正n边形面积$S_n=\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$，外切正$n$边形面积$\overline{s}_n$为$\overline{s}_n=n\tan\frac{\pi}{n}$，故

$$\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}<\pi<n\tan\frac{\pi}{n} \tag{30-1}$$

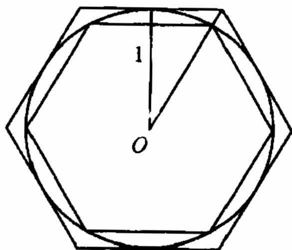


图30-1　圆的正多边形逼近

实验1　利用多边形的面积计算π的近似值，并估计误差。

解：利用(30-1)式，令$n=6\cdot 2^k(k=0,1,2,\cdots)$，则有

$$3\cdot 2^k\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^k}<\pi<6\cdot 2^k\tan\frac{\pi}{6\cdot 2^k} \tag{30-2}$$

因此，当用 $3\cdot 2^k\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^k}$ 去近似 π 时，误差不超过 $6\cdot 2^k\tan\frac{\pi}{6\cdot 2^k}-3\cdot 2^k\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^k}$。令 $a_k=3\cdot 2^k\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^k}$，$b_k=6\cdot 2^k\tan\frac{\pi}{6\cdot 2^k}$，则有 $a_0=3\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$a_k=\sqrt{2}a_{k-1}(1+(1-(\frac{a_{k-1}}{3\cdot 2^{k-1}})^2)^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}, k=1,2,\cdots$，$b_k=\frac{a_{k+1}^2}{a_k}, k=1,2,\cdots$。

计算结果如表 30-1。

表 30-1 π 的近似值

n	内接多边形面积	外切多边形面积	误　差
6	2.59808	3.4641	0.110504
12	3	3.21539	0.0338975
24	3.10583	3.15966	0.00884841
48	3.13263	3.14609	0.00223524
96	3.13935	3.14271	0.000560252

练习 1　请分别计算 H_n、$\overline{H_n}$ 以及误差 ε_n，与实验 1 的结果进行比较，并针对以上结果给出一个合理的解释。其中 $P_n=\frac{n}{4}\sin\frac{\pi}{n}$，$\overline{P_n}=\frac{n}{2}\tan\frac{2\pi}{n}$，$H_n=\frac{1}{3}(4S_n-P_n)$，$\overline{H_n}=\frac{1}{3}(4\overline{S_n}-\overline{P_n})$，$\varepsilon_n=\left|\pi-\frac{H_n+\overline{H}_n}{2}\right|$。

练习 2　你能对式(30-1)作进一步的改进吗？

30.2　用迭代法求π

1593 年，韦达首次给出了计算 π 的递归公式

$$\begin{cases} v_1=\sqrt{\frac{1}{2}} \\ v_n=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}v_{n-1}} \end{cases} \tag{30-3}$$

韦达公式为

$$\pi=\frac{2}{\prod_{n=1}^{\infty}v_n} \tag{30-4}$$

韦达公式看起来神秘，事实上我们可以从利用多边形近似单位圆的面积入手，将边数取为 $2n,4n,\cdots$。由(30-1)式，可以得到

$$\frac{s_n}{s_{2n}}=\cos\frac{\pi}{n} \tag{30-5}$$

对于任意 $k>1$，有

$$S_{4\cdot 2^k}=\frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots\cos\frac{\pi}{4\cdot 2^{k-1}}} \tag{30-6}$$

又由于 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$，$\cos\frac{\pi}{16}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$。归纳可知

$$\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \tag{30-7}$$

于是就得到(30-4)式。

实验 2 利用韦达公式计算 π 的近似值，并给出误差。

解：利用韦达公式，计算结果迭代的图形如图 30-2。

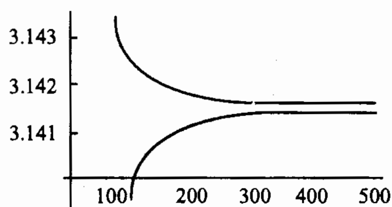


图 30-2 利用韦达公式迭代的图形

练习 3 分别利用韦达公式，选取 $n=100,1000,\cdots$，观察 n 值的增加所导致 π 的近似值的变化，你能对 n 值与误差之间的关系给出一个结论吗？

1989 年博文（Borwein）发现如下迭代初的 a_n 收敛于 $\frac{1}{\pi}$：

$$\begin{cases} y_0=\sqrt{2}-1 \\ y_n=\dfrac{1-\sqrt[4]{1-y_{n-1}^4}}{1+\sqrt[4]{1-y_{n-1}^4}} \\ a_0=6-4\sqrt{2} \\ a_n=(1+y_n)^4a_{n-1}-2^{2n+1}y_n(1+y_n+y_n^2), n=1,2,\cdots \end{cases} \tag{30-8}$$

且以 a_n 近似 $\frac{1}{\pi}$ 的误差不超过 $16\cdot 4^n\,\mathrm{e}^{-2\pi 4^n}$

实验 3 利用博文迭代式计算 π 的近似值并观察收敛的误差界。

解：利用博文迭代式计算 π 的近似值时，迭代 4 次可精确到 693 位小数。

练习 4 利用博文迭代式计算 π 到小数点后 40 位，并与韦达公式比较其迭代速度。

1996 年贝莱（Bailey）得到（30-8）式改进型迭代式

$$\begin{cases} y_0=5(\sqrt{5}-1) \\ y_n=25((1+\lambda+\dfrac{\beta}{\lambda})^2y_{n-1})^{-1} \\ a_0=\dfrac{1}{2} \\ a_n=y_{n-1}^2a_{n-1}-5^{n-1}(\dfrac{1}{2}(y_{n-1}^2-5)+\sqrt{y_{n-1}(y_{n-1}^2-2y_{n-1}+5)}), n=1,2,\cdots \end{cases} \tag{30-9}$$

其中 $\lambda=\sqrt[5]{\dfrac{\beta(7+\alpha+\sqrt{(7+\alpha)^2-4\beta^3})}{2}},\alpha=\left(2-\dfrac{5}{y_{n-1}}\right)^2,\beta=\left(-1+\dfrac{5}{y_{n-1}}\right)^2$ 以 a_n 近似 $\dfrac{1}{\pi}$ 的误差不超过 $16\cdot 5^n\cdot e^{-\pi\cdot 5^n}$。

练习 5 利用（30-9）式迭代 4 次，计算 π 的近似值，观察其近似效果。并观察其收敛的误差界（$n<15$）。

30.3 数值积分法求 π

定积分

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\pi$$

计算出这个定积分的数值，也就是得到了 π 的值。

实验 4 选取不同的 n，分别利用实验二十六中介绍的数值积分梯形公式和辛普森公式计算 $\pi=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 近似值，并给出其误差。

练习 6 误差的实际观察：选取 $n=1000,10000,100000,\cdots$ 等，观察 n 值的增加所导致的 s 值的变化情况，直到 n 的增加所导致的 s 的变化小于给定的误差界，比较同一个 n 值下梯形公式和辛普森公式计算结果的差别，对两种方法的精度差别获得一个感性认识。

练习 7 从理论上分析计算误差与 n 的关系，并与实际观察结果相比较。

练习 8 半径为 1 的圆的面积等于 π，用数值积分法计算这个面积。

练习 9 自己设计类似的方法计算其它一些无理数如 ln2 的近似值。

30.4 级数法求 π

幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n$ 在 $|x|<1$ 时收敛于 $\frac{1}{1+x^2}$，即

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\quad,\qquad -1<x<1 \tag{30-10}$$

对（30-10）式逐项积分得

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad,\qquad -1<x<1 \tag{30-11}$$

因右端级数当 $|x|=1$ 时仍收敛，由幂级数的性质知，上式在 $x=\pm1$ 时也成立。

式(30-11)的左端为一角度，与 π 有关，我们只要求出右端级数的和，就可以求出 π 了。

30.4.1 莱布尼茨级数求 π

当 $x=1$ 时，(30-11)式成为，

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} \tag{30-12}$$

这是由莱布尼茨于 1674 年首先得到的计算 π 的公式。

但是，(30-12)式右端的交错级数是条件收敛而非绝对收敛的，若用前 n 项和作近似，产生

的误差将介于$\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}$与$\frac{1}{2n+1}$之间，因此该级数的收敛速度是不能令人满意的。

实验 5 利用(30-12)式计算π的近似值并估计其误差。

解：利用(30-12)式计算π的近似值，由计算结果可看出，使用前 1000 项计算大约能精确到百分位。

1844 年，数学家达什在没有计算机的情况下利用此式算出了π的前 200 位小数，使用误差估计式

$$r_n=\frac{\pi}{4}-(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1})\leqslant\frac{1}{2n-1}$$

计算一下要精确到π的 200 位小数需要取级数的多少项？

练习 10 利用(30-12)式计算π的近似值，精确到 200 位小数。

30.4.2 泰勒级数法

为了在计算π时收敛速度快一些，可以取较小的正数作为 x 代入(30-11)式。因为(30-11)式中级数的收敛速度会因为x的取值不同而不同。一般来说，x的绝对值越小，该幂级数的收敛速度越快，而 x 的绝对值越大，该级数的收敛速度越慢。例如我们在(30-11)式的两端令$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，会得到下列等式：

$$\frac{\pi}{6}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n+1}$$

等式右端级数的收敛速度显然要优于(30-12)式中级数的收敛速度，但是级数中含有的根式却是不易计算的。

当(30-11)式中的 x 取区间$(0,1)$内其它的数时，除了会造成级数求和复杂外，也可能使$\arctan x$与π之间的关系不易确定。这两个缺陷是不可能同时避免的。

那么怎么利用(30-11)式计算π，才能使计算简单，收敛速度又比用莱布尼茨公式(30-12)快呢？17 世纪后的许多著名数学家想到，将$\frac{\pi}{4}$分成两个或两个以上小角度的和，每个小角度用反正切表示，这样就可利用（30-11）式计算出每个小角度进而算出π。如果用(30-11)式计算每个小角度时，没有复杂的运算，收敛速度也较快，那么这种方法是可取的。该方法的关键是如何将$\frac{\pi}{4}$分成一些较容易计算的小角度的和。

一般地，取$\tan\alpha$为某个真分数，由

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

计算出

$$\tan\beta=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha},$$

就可以得到恒等式$\frac{\pi}{4}=\alpha+\beta$。令$x=\tan\alpha=\frac{1}{5}$，$\alpha=\arctan\frac{1}{5}$，那么

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2x}{1-x^2}=\frac{5}{12}$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119} \approx 1$$

因此，$4\alpha \approx \frac{\pi}{4}$，$\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$非常接近 0。又

$$\tan\beta = \frac{\tan 4\alpha - 1}{1+\tan 4\alpha \cdot 1} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$$

所以

$$\pi = 16\alpha - 4\beta = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239} = 16\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot\frac{1}{5^{2k+1}} - 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot\frac{1}{239^{2k+1}} \tag{30-13}$$

(30-13)式称为马琴（Maqin）公式。

实验 6 利用马琴公式，计算π的近似值到给定的精度。与π的准确值比较，并与数值积分法得到的结果比较。

练习 11 如果要计算π的前 15 位数字，计算 $\arctan(1/5)$ 和 $\arctan(1/239)$ 应当取到幂级数展开式的多少项？取几千或几万项是否就能得到高精度的π值？

练习 12 证明 Euler 等式$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$，并由此计算π的近似值。

又如：令$\tan\alpha = \frac{1001}{1999}$，因$\tan\beta = \frac{1-1001/1999}{1+1001/1999} = \frac{998}{3000}$，于是有

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1001}{1999} + \arctan\frac{998}{3000}$$

用类似的方法，还可以进一步地将上面的$\arctan\frac{1001}{1999}$分成两个更小的角度之和，这个问题我们留给读者。

找到恒等式后，利用(30-11)式便可以计算π了，例如由上面的等式可得：

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1001}{1999}\right)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\left(\frac{998}{3000}\right)^{2n+1} \tag{30-14}$$

实验 7 用(30-14)式近似计算π。

练习 13 将实验 7 与实验 6 的π值比较，那个收敛的速度快？

练习 14 你能否自己设计一个计算π的公式，并与实验 7 计算π的方法相比较，哪个收敛速度快？

根据以上原理还可以得到

高斯公式：

$$\pi = 48\arctan\frac{1}{18} + 32\arctan\frac{1}{57} - 20\arctan\frac{1}{239} \tag{30-15}$$

斯托梅尔公式：

$$\pi = 24\arctan\frac{1}{8} + 8\arctan\frac{1}{57} + 4\arctan\frac{1}{239} \tag{30-16}$$

下面再列出一些类似公式供读者参考

$$\frac{\pi}{4}=5\operatorname{arccot}(6)-\operatorname{arccot}\left(\frac{503}{16}\right)-\operatorname{arccot}(117)$$

$$\frac{\pi}{4}=6\operatorname{arccot}(8)+\operatorname{arccot}\left(\frac{99}{5}\right)-3\operatorname{arccot}(268)$$

$$\frac{\pi}{4}=8\operatorname{arccot}(10)-2\operatorname{arccot}\left(\frac{452761}{2543}\right)-\operatorname{arccot}(1393)$$

$$\frac{\pi}{4}=12\operatorname{arccot}(18)+3\operatorname{arccot}(70)+5\operatorname{arccot}(99)+8\operatorname{arccot}(307)$$

$$\frac{\pi}{4}=5\operatorname{arccot}(7)+2\operatorname{arccot}\left(\frac{79}{3}\right)$$

$$\frac{\pi}{4}=8\operatorname{arccot}(10)-\operatorname{arccot}(239)-4\operatorname{arccot}(515)$$

$$\frac{\pi}{4}=8\operatorname{arccot}(10)-\operatorname{arccot}(100)-4\operatorname{arccot}(515)-\operatorname{arccot}\left(\frac{371498882}{3583}\right)$$

$$\frac{\pi}{4}=12\operatorname{arccot}(18)+8\operatorname{arccot}(99)+3\operatorname{arccot}(239)+8\operatorname{arccot}(307)$$

练习 15 分别选用上面的计算π的公式计算π的前 50 位值，并分析它们的计算速度。

练习 16 牛顿曾发现了如下的等式

$$\pi=6\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3\cdot2^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot2^5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot2^7}+\cdots\right)$$

$$=6\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\cdot(2n+1)\cdot2^{2n+1}}\right)$$

你能否运用这个式子计算π的前 10 位？

将函数$f(x)=|x|(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$展开成傅里叶级数后令$x=0$，由收敛定理可得到：

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \tag{30-17}$$

利用此式也可以计算π，虽然右端级数的收敛速度不理想，但我们可以做如下修改使其加快。将下式

$$\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

与（30-17）式相减，可以得到

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{(2k-1)^2(2k+1)} \tag{30-18}$$

显然，（30-18）式中级数的收敛速度要比（30-17）式中级数的收敛速度快一个数量级。

练习 17 选择适当的等式进一步改善(30-18)式中级数的收敛速度，并用你得到的式子计算π。

练习 18 自己设计类似的方法计算$\ln 2$。

30.4.3 其它公式

目前，计算π的一个极其有效的公式为

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{1103+26390n}{396^{4n}} \tag{30-19}$$

式（30-19）称为拉玛努金（Ramanujan）公式。这个级数收敛得非常快，级数每增加一项，可提高大约 8 位小数的精度。

实验 8 利用（30-19）式计算π的近似值，并观察其误差变化。

1985 年，数学家比尔·高斯帕依使用这个公式算出π的 1750 万位小数。这个神奇的公式归功于印度年轻的传奇数学家拉玛努金。

另一个经过改进的计算公式为

$$\frac{1}{\pi}=\frac{12}{640320^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!}{(n!)^3(3n)!}\frac{13591409+545140134n}{640320^{3n}} \tag{30-20}$$

练习 19 利用（30-20）式计算π的近似值，并观察误差与 n 的关系。

提示：对 $n=5,6,\cdots,20$ 分别列出计算误差。

30.5 蒙特卡罗（Monte Carlo）法

单位圆的面积等于π。可以用数值积分公式来计算这个面积的近似值。另一个方法是用蒙特卡罗法，即用随机投点的方法来求这个面积π的近似值。具体方法如下：

在平面直角坐标系中，以 $O(0,0),A(1,0),C(1,1),B(0,1)$ 为四个顶点作一个正方形，其面积 S=1，以原点 O 为圆心的单位圆在这个正方形内的部分是圆心角为直角的扇形，面积为 $S_1=\pi/4$，在这个正方形内随机地投入 n 个点，设其中有 m 个点落在单位扇形内。则

$$\frac{m}{n}\approx\frac{S_1}{S}=\frac{\pi}{4}\quad,\quad \pi\approx\frac{4m}{n}$$

随机投点（如图 30-3）可以这样来实现：任意产生区间 [0,1] 内的一组随机数 x,y，则 (x,y) 就代表一个随机点 P 的坐标。这个点落在单位扇形内的充分必要条件是 $x^2+y^2\leqslant1$

实验 9 取不同的 n 做上面的实验，将所得的π的近似值记录下来，与已知的π的值比较。

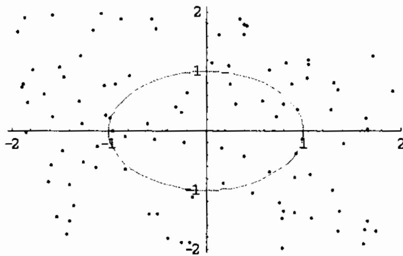


图 30-3 随机投点示意图

练习 20 观察 n 的大小对所得结果的精确度的影响，可以看到：n 太小，精度太差。但如果 n 太大，从计算机上所得的不是真正的随机数，效果仍不理想。总的说来，这个方法的精确度是差的。

另一种用蒙特卡罗法来计算π的方法是 1777 年法国数学家蒲丰（Buffon）提出随机掷针试验。其步骤如下：

(1) 取一张白纸，在上面画许多间距为 d 的等距平行线；

(2) 取一根长度为 $l(l<d)$ 的均匀直针，随机地向画有平行线的纸上掷去，一共投掷 n 次（n 是一个很大的整数）。观察针和直线相交的次数 m;

(3) 由分析知道针和直线相交的概率 $p=\dfrac{2l}{\pi d}$。取 m/n 为 p 的近似值，则

$$\pi\approx\frac{2nl}{md}$$

特别地，取针的长度 $l=\dfrac{d}{2}$ 时，$\pi\approx\dfrac{n}{m}$。

练习 21 请尝试设计一个方案，用计算机模拟蒲丰投针实验，得出 π 的近似值。

练习 22 随机整数互素的概率：取一个最大的整数 N。在 1 到 N 之间随机地取一对整数 a,b，找出它们的最大公约数 (a,b)。当 $(a,b)=1$ 时称 a,b 互素。做 n 次这样的实验，记录其中 $(a,b)=1$ 的情况出现的次数 m。算出 $p=m/n$ 的值。

理论分析指出：随机整数互素的概率为 $p=\dfrac{1}{\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots}=\dfrac{6}{\pi^2}$。因而 $\pi\approx\sqrt{\dfrac{6n}{m}}$

30.6 值得进一步研究的问题

1995 年，Bailey，Borwein 和 Plouffe 给出了以下 π 的一个计算公式

$$\pi=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}\right)\tag{30-21}$$

问题 1 （30-21）式右端是否等于 π，试推导之，并从 16 进制数的观点阐述（30-21）式的意义。

问题 2 类似于（30-21）式，有以下公式

$$\arctan 2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k}\left(\frac{1}{8k+1}+\frac{\frac{1}{2}}{8k+3}-\frac{\frac{1}{4}}{8k+5}-\frac{\frac{1}{8}}{8k+7}\right)$$

$$\ln 3=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^{k+1}}\left(\frac{16}{4k+1}+\frac{4}{4k+3}\right)$$

$$\ln 5=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^{k+1}}\left(\frac{16}{4k+1}+\frac{16}{4k+2}+\frac{4}{4k+3}\right)$$

试证明之。

问题 3 验证以下公式

$$\ln 2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{k}\qquad \ln 2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{9^k}\cdot\frac{\frac{2}{3}}{k+1}$$

$$\ln 3=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k}\cdot\frac{1}{2k+1}\qquad \ln\frac{9}{10}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^k}\cdot\frac{1}{k}$$

问题 4 验证以下公式

$$\pi=\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k}\left(2\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{4n+1}+2\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{4n+2}+\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{4n+3}\right)$$

$$\pi=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left(\frac{-238}{k+1}+\frac{\frac{285}{2}}{2k+1}-\frac{\frac{667}{32}}{4k+1}-\frac{\frac{5103}{16}}{4k+3}+\frac{\frac{35625}{32}}{4k+5}\right)$$

$$\pi^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left(\frac{-12}{k+1}+\frac{384}{k+2}+\frac{\frac{45}{2}}{2k+1}-\frac{\frac{1215}{2}}{2k+3}\right)$$

$$\pi=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k k^2}\left(\frac{\frac{751}{8}}{4k+1}-\frac{\frac{375}{2}}{4k+2}+\frac{\frac{9}{16}}{4k+3}-\frac{188}{4k+4}+\frac{9375}{16(4k+5)}-\frac{423}{4k+6}\right)$$

$$\pi=\frac{37}{12}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k\cdot k}\left(-\frac{\frac{1}{2}}{4k+1}-\frac{1}{4k+2}-\frac{\frac{3}{4}}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}\right)$$

附　Mathematica 程序

1. 实验 1 的程序

```
piInscribed[n_] := n*Sin[2 Pi/n]/2;piCircumscribed[n_] := n Tan[Pi/n];
error[n_] := Abs[Pi - (piInscribed[n] + piCircumscribed[n])/2.];
sizes = 32^(Range[5]);
TableForm[Transpose[{sizes, N[piInscribed[sizes]], N[piCircumscribed[sizes]],
error[sizes]}], TableHeadings -> {None, {Sides, piInscribed, piCircumscribed, Error}}]
```

2. 实验 2 的程序

```
PiInterval[n_] := {n/2 Sin[N[Pi] / n], n Tan[N[Pi] / n]}
PiSqueeze[n_] := Module[{a, lower, upper, middle, i}, a = 2 N[Pi] / i;
lower = ListPlot[Table[i / 2 Sin[2 N[Pi] / i],       {i, 3, n}], DisplayFunction -> Identity];
    upper = ListPlot[Table[i Tan[N[Pi] / i], {i, 3, n}],DisplayFunction -> Identity];
middle = ListPlot[Table[NVieta[i], {i, Max[20, Floor @ Log @ n]}],
                    DisplayFunction -> Identity, PlotJoined -> True];
    Show[{lower, upper, middle}, DisplayFunction -> $DisplayFunction]]
NVieta[n_] :=    2 / NProduct[Cos[Pi / 2^i], {i, 2, n}]
t1 = Table[{n, NVieta[n], N[Pi - NVieta[n]]}, {n, 0, 20, 2}];
TableForm[t1, TableHeadings -> {None, {n, NVieta, Error}}]
PiSqueeze[500];
```

3. 实验 3 的程序

```
Clear[y, z, a, t];y[0] = Sqrt[2] - 1;z[n_] := (1 - y[n - 1]^4)^(1/4);
y[n_] := (1 - z[n])/(1 + z[n]);a[0] = 6 - 4Sqrt[2];
a[n_] := (1 + y[n])^4a[n - 1] - 2^(2 n + 1) y[n] (1 + y[n] + y[n]^2);
t1 = Table[{n, N[1/a[n]], N[Pi - 1/a[n]]}, {n, 1, 4}];
TableForm[t1, TableHeadings -> {None, {n, a, Error}}]
```

4. 实验 4 的程序

```
a = 0; b = 1; y[x_] := 4/(1 + x^2);
quad[n_] := N[(b - a)/n*(Sum[y[a + i*(b - a)/n], {i, 1, n - 1}] + (y[a] + y[b])/2), 20];
t1 = Table[{n, quad[n], N[Pi - quad[n], 20]}, {n, 1000, 2000, 100}];
TableForm[t1, TableHeadings -> {None, {"n", "quad","Error"}}]
a = 0; b = 1; y[x_] := 4/(1 + x^2);
simpson[n_] := N[(b - a)/(6*n)*(2*Sum[y[a + i*(b - a)/n], {i, 1, n - 1}] +
            4*Sum[y[a + (i - 1/2)*(b - a)/n], {i, 1, n}] + y[a] + y[b]), 50]
t2 = Table[{n, simpson[n], N[Pi - simpson[n], 40]}, {n, 1000, 2000, 100}];
TableForm[t2, TableHeadings -> {None, {"n", "simpson","Error"}}];
```

5. 实验 5 的程序

```
Clear[n, t1];lebn[n_] := 4*Sum[(-1)^j/(2*j + 1), {j, 0, n}];
t1 = Table[{n, N[lebn[n], 20], N[Pi - lebn[n], 20]}, {n, 100, 1000, 100}];
TableForm[t1, TableHeadings -> {None, {"n", "Lebnic", "Error"}}]
```

6. 实验 6 的程序

```
Clear[t1, n, j];
pimaqin[n_] := 16*Sum[(-1)^j/((2*j + 1)*5^(2*j + 1)), {j, 0, n}] -
      4*Sum[(-1)^j*(1/239)^(2*j + 1)/(2*j + 1), {j, 0, n}];
t1 = Table[{n, N[pimaqin[n], 50], N[Pi - pimaqin[n], 50]}, {n, 1, 26, 5}];
TableForm[t1, TableHeadings -> {None, {n, pimaqin, Error}}]
```

7. 实验 7 的程序

```
Clear[t1, n, j];
piimp[n_] := 4*Sum[(-1)^j/(2*j + 1)*(1001/1999)^(2*j + 1), {j, 0, n}] +
      4*Sum[(-1)^j*(998/3000)^(2*j + 1)/(2*j + 1), {j, 0, n}];
t1 = Table[{n, N[piimp[n], 50], N[Pi - piimp[n], 50]}, {n, 1, 26, 5}];
TableForm[t1, TableHeadings -> {None, {n, piimp, Error}}]
```

8. 实验 8 的程序

```
Clear[t1, n, j];
pirama[n_] := 2*Sqrt[2]/9801*Sum[(4 j)!/(j!)^4*(1103 + 26390 j)/396^(4 j), {j, 0, n}];
t1 = Table[{n, N[1./pirama[n], 50], N[Pi - 1./pirama[n], 50]}, {n, 5, 10}];
TableForm[t1, TableHeadings -> {None, {n, pirama, Error}}]
```

9. 实验 9 的程序

```
NumberOfPoints=n=10000;
Do[x[i]=Random[Real,{-2,2}];y[i]=Random[Real,{-2,2}], {i,1,n}];
Table[{x[i],y[i]},{i,1,10}];
a=ParametricPlot[{Cos[t],Sin[t]},{t,0,2Pi},PlotStyle->RGBColor[1,0,0],
                  DisplayFunction->Identity];
b=ListPlot[Table[{x[i],y[i]},{i,1,n}],DisplayFunction->Identity];
Show[a,b,DisplayFunction->$DisplayFunction];
Do[z[i]=If[x[i]^2 + y[i]^2 <= 1,1,0],{i,1,n}];
```

```
PtsInCircle = Sum[z[i],{i,1,n}];
ApproxOfProb = N[PtsInCircle/n];RealProb = N[Pi/16];
ApproxOfPi = N[16*PtsInCircle/n];
Print["n=     ",n,"    Pi=",ApproxOfPi,"          error=",N[Pi-ApproxOfPi]]
```

实验三十一　线性变换及其迭代

如果有一种法则 T，对平面点集 D 中的每个点 A，都对应平面上唯一的一个点 T（A），则称 T 为平面上的一个变换，T（A）称为 A 的像。

平面上的图形由点组成，因而平面上的变换 T 将一个图形 G 变到另一个图形 $T(G)$，$T(G)$ 称为 G 的像。在平面上建立了直角坐标系后，平面上每个点 P 可由它的坐标 (x, y) 来表示，其中 $x, y\in R$，平面上的变换 T 将每个点 $P(x,y)$ 变到点 $T(P)(x', y')$，即 $x' = f_1(x, y), y' = f_2(x, y)$。

只要给定了两个函数 f_1 和 f_2，就决定了一个变换，它将坐标为（x,y）的点，变到坐标为 $(f_1(x, y), f_2(x, y))$ 的点，从这个意义上，可以称 T 为几何变换。

设平面参数曲线 C 的方程为 $x = x(t), y = y(t)$，　$t\in[a,b]$，则参数曲线 C 在变换 T 下的像 $T(G)$ 的参数方程为 $x = f_1(x(t), y(t)), y = f_2(x(t), y(t)), t\in[a,b]$。

几何变换是计算机图形学中的基本理论，有着广泛的实际应用。德国数学家克莱因提出，几何学的任务就是研究在一定的几何变换（这些变换组成一个群，称之为变换群）下图形的不变性质。例如，欧氏几何中的变换是平面图形的平移、转动、轴对称，在这些变换下，长度、角度保持不变。

本实验的主要内容是观察在几种重要的几何变换下图形的变化，线性变换的矩阵以及迭代一个平面线性变换时所出现的一些现象。

31.1　线性变换与仿射变换

一般地，如果变换 $T:(x, y)\mapsto(x', y')$ 由函数关系

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y \\ y' = a_2x + b_2y \end{cases}$$

决定，其中 a_1, b_1, a_2, b_2 是与 x,y 无关系的常数，则称 T 为线性变换，它可表示成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

且线性变换由矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ 决定。

进一步地，如果在变换 T 下每个点（x,y）的像的坐标 (x', y') 都是 x,y 的一次函数

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases} \tag{31-1}$$

则称变换 T 是仿射变换。仿射变换包括平移变换、缩放变换、旋转变换、对称变换，可表示为如下矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{31-2}$$

或

$$(x',y',1)=(x,y,1)\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} \tag{31-3}$$

表 31-1 给出变换与矩阵之间的关系。

表 31-1　仿射变换及其变换矩阵

仿 射 变 换	变换矩阵
平移量为 (l,m) 的平移变换	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$
逆时针旋转 θ 角度（以原点为中心）	$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
比例系数为 a,b 的缩放变换	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
关于 x 轴的对称变换	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
关于 $y=x$ 的对称变换	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

由于函数的图像是由 $(x,f(x))$ 点列构成，因此，我们可以类似地对函数的图像作仿射变换。

实验 1　对函数的图像作平移变换，以 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 为例，观察图像的变化。

解：将函数 $y=f(x)$ 变换为 $y=f(x-a)$，函数的图像会向右移动 a 个单位，这时称 a 为水平位置参数。

(1) $a>0$，图像“向右移动”；$a<0$，图像“向左移动”。如图 31-1 所示。

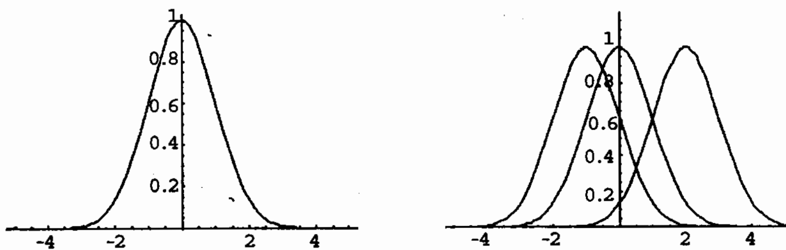


图 31-1　函数图像的平移变换

(2) 通过动画观察 a 对图像的影响，如图 31-2 所示。

练习 1　请观察把函数 $f(x)$ 变换化为 $f(x)+b$ 时，函数图像的变化？

练习 2　请观察把函数 $f(x)$ 变换化为 $f(x-a)+b$ 时，函数图像的变化规律？并给出(a,b)的意义。

实验 2　对函数的图像作伸缩变换，以 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 为例，观察图像的变化。

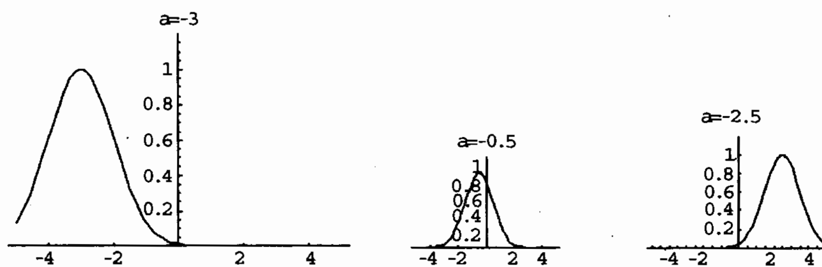


图 31-2　a 对图像的影响

解：将函数 $y=f(x)$ 变换为 $y=f(s,x)$，函数的图像会压缩或伸长，这时称 s 为水平位置刻度参数。

(1) $s>0$ 时，s 越大，图像“越瘦”；s 越小，图像“越胖”。如图 31-3 所示。

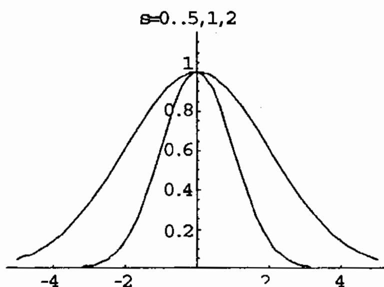


图 31-3　函数图像的伸缩变换

(2) 通过动画观察 s 对图像的影响，部分图形如图 31-4 所示。

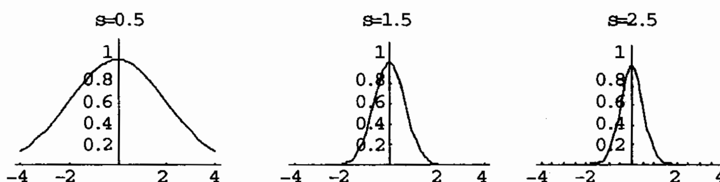


图 31-4　s 对图像的影响

练习 3　请观察把函数 $f(x)$ 变换化为 $tf(s,x)$ 时，函数图像的变化？并给出参数 t 的意义。

练习 4　特别地，观察 $f(x)$ 变换为 $f(-x),-f(x)$ 图像的变化？

实验 3　对函数的图像作绕原点的旋转变换。以 $y=x^4$ 绕原点旋转 $\frac{\pi}{3}$ 为例，观察图像的变化。

解：设函数图像的原点为中心旋转 θ 角，原来坐标 (x,y) 与变换后的坐标 (x',y') 具有以下关系，如图 31-5 所示。

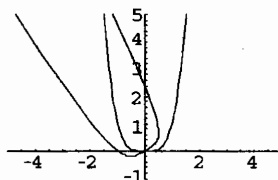


图 31-5　函数图像绕原点的旋转变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

练习 5 任选一个角度α，决定一个线性变换$T:(x,y)\mapsto(x',y')$，使

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

画一个由平面直线段或曲线段组合的图形 C，在画出它在上述变换下的像 $T(C)$，观察 $T(C)$的变化。

练习 6 给出正方形 $ABCD$，绕其中心进行旋转的同时还在不断地放大的变换。

设正方形顶点坐标分别为$A(-1,-1), B(1,-1), C(1,1), D(-1,1)$，每次逆时针旋转时旋转的角度为$\alpha=\dfrac{\pi}{60}$，同时放大$s=\sin\alpha+\cos\alpha$。试作出该变换过程的图形，并注意观察图像的变化。

31.2 线性变换的特征向量

由线性代数知识，如果非零向量$\boldsymbol{u}=\overrightarrow{OP}$在线性变换$T$的作用下的像$\overrightarrow{OP'}=A\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{u}$的方向平行（方向相同或相反），即$A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$对某一数$\lambda$成立，则$\boldsymbol{u}$称为$T$的特征向量，平面线性变换$T$的特征值$\lambda$是一元二次方程$\begin{vmatrix} \lambda-a_1 & -b_1 \\ -a_2 & \lambda-b_2 \end{vmatrix}=0$，即$\lambda^2-(a_1+b_2)\lambda+(a_1b_2-a_2b_1)=0$的根。

选取的矩阵$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$，决定线性变换$T:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$。

平面上每个点$P(x,y)$被变到$P'(x',y')$，向量$\overrightarrow{OP}$也就被变到$\overrightarrow{OP'}$。我们可以通过作图来研究向量的方向的变换情况。

实验 4 令变换矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1+\varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 1+\varepsilon_4 \end{pmatrix},\quad (\text{其中}\ \varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\ \text{是小的正实数})$$

任选$n\in N$，在单位圆上依次选取n个点 $P_i(\cos\dfrac{2k\pi}{n},\sin\dfrac{2k\pi}{n})$ $(0\leqslant k\leqslant n-1)$，$P_i'$为$P_i$经变换$T$后的像，试观察$\overrightarrow{OP_i}$与$\overrightarrow{P_iP_i'}$的方向，如图 31-6 所示。

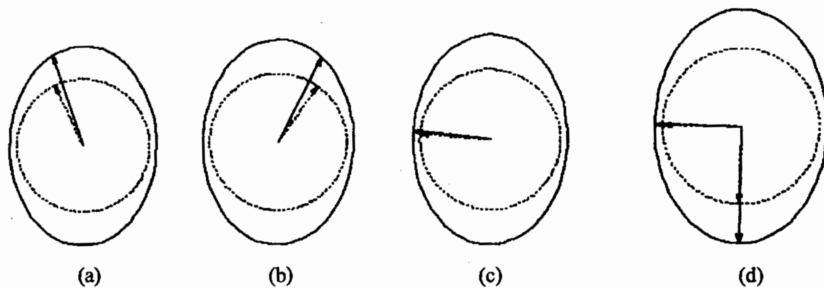


图 31-6 $\overrightarrow{OP_i}$与$\overrightarrow{P_iP_i'}$的方向

练习 7 另外任意选取矩阵A，重做实验 3，并给出合理的解释。

31.3 线性变换的迭代

31.3.1 平面线性变换的迭代

如果令 $\boldsymbol{P}_n=(x_n,y_n)^{\mathrm{T}}$，则可以得到这样的点列

$$\boldsymbol{P}_{n+1}=A\boldsymbol{P}_n \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{31-4}$$

即 $\boldsymbol{P}_0,A\boldsymbol{P}_0,A^2\boldsymbol{P}_0,\cdots,A^{n+1}\boldsymbol{P}_0,\cdots$，在平面坐标系内这个点列会是什么呢？这就是我们所要考虑的线性变换的迭代问题。

这里的线性变换的形式为

$$\begin{cases}x_{n+1}=a_{11}x_n+a_{12}y_n\\ y_{n+1}=a_{21}x_n+a_{22}y_n\end{cases} \tag{31-5}$$

实验 5 对下述迭代

$$\begin{cases}x_{n+1}=x_n\\ y_{n+1}=2y_n\end{cases} \quad 即 \quad \begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$$

和

$$\begin{cases}x_{n+1}=x_n+2y_n\\ y_{n+1}=3x_n-y_n\end{cases} \quad 即 \quad \begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$$

从某个给定的 $(x_0,y_0)^{\mathrm{T}}$ 开始，画出由 (x_0,y_0) 生成的点列散点图。

解：画出由 $(x_0,y_0)=(1,1)$ 生成的点列散点图如图 31-7。

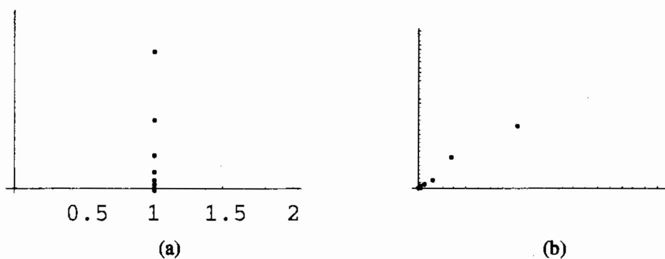


图 31-7 由 (x_0,y_0) 生成的点列散点图

练习 8 对于迭代矩阵 $A=\begin{pmatrix}0.2 & 0.99\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，分别从 $(x_0,y_0)^{\mathrm{T}}=(1,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $(x_0,y_0)^{\mathrm{T}}=(1,0)^{\mathrm{T}}$ 开始迭代，试观察它的图形有什么特点？

练习 9 并观察练习 7 中的序列 y_n/x_n，x_{n+1}/x_n，y_{n+1}/y_n，你能得到什么结论？

实验 6 利用练习 7 的矩阵 A 并选择一个 $(x_0,y_0)^{\mathrm{T}}$，利用（31-5）式找出迭代序列 (x_n,y_n)，并观察斜率序列 y_n/x_n。以便看出选带逐渐收敛于某个斜率为 m 的直线。m 是什么？观察 x_{n+1}/x_n 和 y_{n+1}/y_n，便可看出在很多次迭代以后映射的作用就像是放大了 a 倍：

$$x_{n+1}=ax_n,\ y_{n+1}=ay_n$$

a 是什么？

解：分别画出迭代序列、斜率序列 y_n/x_n、x_{n+1}/x_n 和 y_{n+1}/y_n 的散点图如图 31-8。

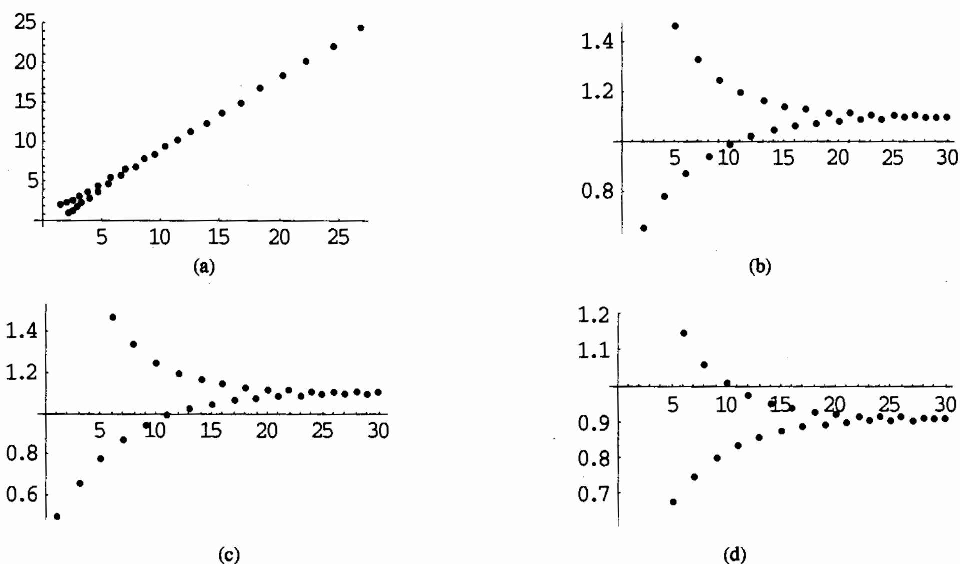


图 31-8　迭代的散点图

(a) 迭代序列；(b) x_{n+1}/x_n；(c) y_{n+1}/y_n；(d) 斜率序列 y_n/x_n 。

练习 10　选择几个不同的初始值 $(x_0, y_0)^{\mathrm{T}}$，重复实验 5 的工作。

练习 11　对矩阵 $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{100}{99} & -\dfrac{20}{99} \end{pmatrix}$，重复做练习 7、练习 8，观察所得到的散点图并与 A 的图形作比较。注意到 $AB = BA = E$ 。

事实上，如果知道 $\{P_n\}$ 的通项，就可以很方便地研究迭代序列的性质。由迭代的过程 $\boldsymbol{P}_n = A\boldsymbol{P}_{n-1} = \cdots = A^n\boldsymbol{P}_0$ 有，如果已知 $\boldsymbol{P}_0$，只要求出 A^n 就可以写出 $\boldsymbol{P}_n$ 的一般通项。

如果 A 为对角矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$，则 $A^n = \begin{pmatrix} a_1^n & 0 \\ 0 & a_2^n \end{pmatrix}$。若 A 不是对角矩阵，由线性代数的知识，它在一定的条件下与对角矩阵相似，即存在可逆矩阵 P 与对角矩阵 $D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$，使得 $A = PDP^{-1}$，于是 $A^n = PD^nP^{-1}$ 。

31.3.2　一般线性变换的迭代

线性变换

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = a_{11}x_1^{(n)} + a_{12}x_2^{(n)} + \cdots + a_{1m}x_m^{n} \\ x_2^{(n+1)} = a_{21}x_1^{(n)} + a_{22}x_2^{n} + \cdots + a_{2m}x_m^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m^{(n+1)} = a_{m1}x_1^{(n)} + a_{m2}x_2^{(n)} + \cdots + a_{mm}x_m^{(n)} \end{cases} \tag{31-6}$$

将向量 $\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_m^{(n)}\right)^{\mathrm{T}}$ 映射为向量 $\left(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, \cdots, x_m^{(n+2)}\right)^{\mathrm{T}}$，它可以写成矩阵形式

$$x_{n+1} = Ax_n \tag{31-7}$$

其中 x_n, x_{n+1} 为 m 维向量，A 为 $m\times m$ 矩阵。

给定一个初始向量 $\boldsymbol{x}_0=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_m^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}$，将上述线性变换反复作用可得到序列：$\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1=A\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_2=A\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{n+1}=A\boldsymbol{x}_n,\cdots$，其中 A 为迭代矩阵。在 31.3.1 中研究了平面线性映射的迭代，即在（31-6）式中取 $m=2$ 的情况。类似地，有

$$\boldsymbol{x}_n=A\boldsymbol{x}_{n-1}=\cdots=A\boldsymbol{x}_0 \tag{31-8}$$

如果 A 是一个对角矩阵或与一个对角矩阵相似，则可以比较方便地求出 A^n，从而可以得到 $\boldsymbol{x}_n$ 的通项。

我们无法像 $n=2$ 的情形，画出平面图形来观察 $\boldsymbol{x}_k$ 是否随着 k 的增长而趋向于一个固定的方向，但可以通过作数值计算来验证 $\boldsymbol{x}_k$ 与 $\boldsymbol{x}_{k-1}$ 趋于成正比。

将 $\boldsymbol{x}_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_m^{(0)})^{\mathrm{T}}$ 除以各分量绝对值之和 $c_0=\left|x_1^{(0)}\right|+\left|x_2^{(0)}\right|+\cdots+\left|x_m^{(0)}\right|$，化为 $\boldsymbol{Y}_0=c_0^{-1}\boldsymbol{x}_0=(y_1^{(0)},y_2^{(0)},\cdots,y_m^{(0)})^{\mathrm{T}}$，其中 $y_i^{(0)}=c_0^{-1}x_i^{(0)},\quad i=1,2,\cdots,m$。从而 $\left|y_1^{(0)}\right|+\left|y_2^{(0)}\right|+\cdots+\left|y_m^{(0)}\right|=1$。这种将向量 $\boldsymbol{x}_0$ 乘以常数 c_0^{-1} 化为 Y_0 使其各分量绝对值之和为 1 的过程称为归一化。取 $\boldsymbol{x}_1=A\boldsymbol{y}_0=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots x_m^{(1)})^{\mathrm{T}}$，再对 x_1 作归一化，得 $\boldsymbol{Y}_1=c_1^{-1}\boldsymbol{x}_1$（其中 $c_1=\left|x_1^{(1)}\right|+\left|x_2^{(1)}\right|+\cdots+\left|x_m^{(1)}\right|$）。依此类推，得 $\boldsymbol{Y}_0,\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\cdots,\boldsymbol{Y}_{k-1},\boldsymbol{Y}_k,\cdots$，其中 $Y_k=c_k^{-1}A\boldsymbol{Y}_{k-1},c_k$ 为 $A\boldsymbol{Y}_{k-1}$ 各分量绝对值之和。如果随着 k 的增大，$\boldsymbol{Y}_{k-1}-\boldsymbol{Y}_k$ 的所有分量都趋于 0，即 $\boldsymbol{Y}_k$ 趋于一个固定的向量 $\boldsymbol{Y}$，则

$$A\boldsymbol{Y}=c\boldsymbol{Y} \tag{31-9}$$

式（31-9）对某个常数 c 成立，即有 $\boldsymbol{Y}$ 为特征向量，c 为 A 的绝对值最大的特征值。这种求特征向量的方法称为乘幂法。这即为实验二十八中介绍的乘幂法的几何意义。

练习 12 选定一个 n 阶矩阵 A，使它的所有元素 $a_{ij}\geq 0$，取初始向量 $Y_0=(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n})^{\mathrm{T}}$ 的所有分量相等，按上述方法进行实验，观察 $Y_{k-1}-Y_k$ 是否随着 k 的增大而趋于零向量。

练习 13 用以上理论，令 $m=2$ 解释 31.3.1 中实验结果的一些现象。

附 Mathematica 程序

1．实验 1 的程序

```
g[x_] := Exp[-x^2/2];Plot[g[x], {x, -5, 5}];
Plot[{g[x + 1], g[x], g[x - 2]}, {x, -5, 5}, PlotRange -> {0, 1.2},PlotStyle
-> {RGBColor[1, 0, 0.802], RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0.251]}];
Do[Plot[g[x - a], {x, -5, 5}, PlotRange -> {0, 1.2},
    PlotLabel -> "a=" <> ToString[a]], {a, -3, 3, 0.5}]
```

2．实验 2 的程序

```
g[x_] := Exp[-x^2/2];
Plot[{g[1/2 x], g[x], g[2 x]}, {x, -5, 5}, PlotRange -> {0, 1.2},
    PlotLabel -> "s=0.5,1,2", PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0.802],
    RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0.251]}];
Do[Plot[g[x s], {x, -4, 4}, PlotRange -> {0, 1.2}, PlotStyle ->
RGBColor[1, 0, 0], PlotLabel -> "s=" <> ToString[s]], {s, 0.5, 2, 0.25}];
```

3．实验 3 的程序

```
a1 = 0.1; a2 = 0.01; a3 = 0.01; a4 = 0.5;A = {{1 + a1, a2}, {a3, 1 + a4}}
Eigenvalues[A]
Eigenvectors[A]
eigshow[A]
unitImage[A, Eigenvectors[A]];
```

4. 实验 4 的程序

```
Clear[t, x, A];A = {{1, 0}, {0, 2}}; x = {1, 1}; t = {};
Do[x = A.x; t = Append[t, x], {i, 30}];
ListPlot[t, PlotStyle -> PointSize[0.01]];
Clear[t, x, A];A = {{1, 2}, {3, -1}}; x = {1, 1}; t = {};
Do[x = A.x; t = Append[t, x], {i, 30}];
ListPlot[t, PlotStyle -> PointSize[0.015]];
```

5. 实验 5 的程序

```
Clear[t, x, A]; xold = x[[1]]; yold = x[[2]];
A = {{0.2, 0.99}, {1, 0}}; x = {1, 2}; t = {}; t1 = {}; t2 = {}; t3 = {};
Do[xnew = A[[1]][[1]] xold + A[[1]][[2]] yold;
    ynew = A[[2]][[1]] xold + A[[2]][[2]] yold; t = Append[t, {xnew, ynew}];
        t1 = Append[t1, xnew/xold];    t2 = Append[t2, ynew/yold];
    t3 = Append[t3, ynew/xnew]; xold = xnew; yold = ynew, {i, 30}];
ListPlot[t, PlotStyle -> PointSize[0.02]];
ListPlot[t1, PlotStyle -> PointSize[0.02]];
ListPlot[t2, PlotStyle -> PointSize[0.02]];
ListPlot[t3, PlotStyle -> PointSize[0.02]];
```

实验三十二　迭代与分形

几何学的研究对象是物体的形状。在自然界中，许多物体的形状是不规则的，如弯弯曲曲的海岸线、变换的浮云等，这些物体的形状的共同特点，就是不规则，不光滑。但是，经典几何学都是以规则而光滑的几何形状为研究对象的。例如，在解析几何与微分几何中，研究的直线、曲线、曲面等都是光滑的。这表明各种经典几何学，实际上是对客观世界中物体形状的不精确描绘。如把事实上凹凸不平的地球表面看成是椭球面，虽然在许多情况下，这样做并不妨碍我们得到非常符合实际的结果（如发射地球人造卫星）。但是，随着人类对客观世界认识的逐步深化以及科学技术的不断进步，这种把不规则的物体加以规则化处理的做法就不能令人满意了。于是，在 20 世纪 70 年代，法国数学家曼德勃罗特（Mandelbrot B. B.）在法兰西学院首次（1973 年）提出了分形（fractal）的思想。分形几何学为描述复杂现象和探索物质世界的复杂机制提供了简洁的工具。他被誉为开创了 20 世纪数学的重要阶段，曼德勃罗特也因此获得了 1985 年度的 Barand 奖章。19 世纪的数学家凭借想象创造出来的不够光滑的、不够规则的曲线，如科赫 koch 曲线、维尔斯特拉斯(Weierstrass K.)曲线等，一直都被视为“病态” 曲线，认为不值得研究而不予理睬。事实上，这些“病态” 曲线，正是分形几何学的主要研究对象。

尽管分形的提出只有 20 多年的时间，但它已经在自然科学的诸多领域如数学、物理、化学、材料科学、生命科学、地质、地理、天文、计算机乃至经济、社会、艺术等极其广泛的领域有着重大的应用，可以毫不夸张地说，“分形是大自然的几何学”，“分形处处可见”。

32.1　生成元

如果有一条线段 a，则用两段小线段代替它，后者即为 b，称之为生成元。

早在 19 世纪末 20 世纪初，一些数学家就构造出一些边界形状极不光滑的图形。由于这类图形长期以来被视为“不可名状的”或“病态的”，因而，只有当人们需要反例时才想到他们。这类图形的构造方式有一个共同特点，即最终图形 F 都是按照一定的规则 R 通过对初始图形 F_0 不断修改得到的。其中最具有代表性的图形是 Koch 曲线，Koch 曲线的构造方式是：

给定一条直线段 F_0，将该直线三等分，并将中间的一段用以该线段为边的等边三角形的另外两条边替代，得到图形 F_1（如图 32-1 所示）。然后，再对图形 F_1 中的每一小段都按上述方式修改，以至无穷。则最后得到的极限曲线 $F=\lim\limits_{k\to\infty}F_k$ 即是所谓的 Koch 曲线。

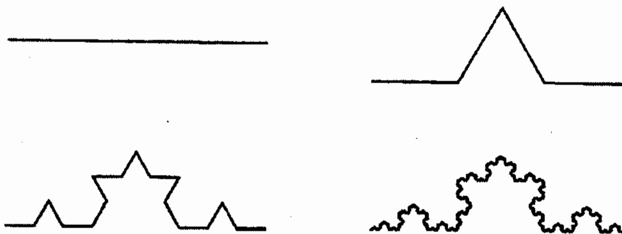


图 32-1　Koch 曲线的生成过程

Koch 曲线的修改规则 R 是将每一条直线段 F_0 用一条折线 F_1 替代，我们称 F_1 为该分形的生成元。分形的基本特性完全由生成元决定。因此，给定一个生成元，我们就可以生成各种各样的分形图形。

实验 1 用计算机绘出 Koch 曲线的图形。

解：Koch 曲线的图形如图 32-2。

图 32-2 Koch 曲线

练习 1 你能否自己构造一些生成元，并由此绘出相应的分形图形？任取分形图形的一个局部并将它放大，它同原来的分形图形有什么关系？

从一个正三角形出发，用 Koch 曲线的生成元作迭代得到的极限图形称为 Koch 雪花曲线。

练习 2 试计算雪花曲线的周长及面积，它们是否有限？你如何解释所得出的结论？

不难想象，如果改变生成元，便可导致另外的曲线。例如，线段 a 用一条由 8 个相等线段组成的折线 b 替代，那么从一条线段出发，生成一条弯弯曲曲的折线，无限地迭代下去导致一条分形曲线，称为 Minkowski 分形，又称之为 Minkowski 香肠。

实验 2 绘出 Minkowski 香肠的图形。

解：Minkowski 香肠的图形如图 32-3。

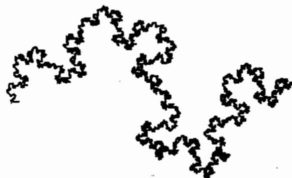


图 32-3 Minkowski 香肠

假设生成元由 n 条线段构成，每段长度为原线段长度的 $\frac{1}{c}$，定义该分形的维数为

$$d = \frac{\log(n)}{\log(c)} \tag{32-1}$$

练习 3 想一想分形维数的大小反映了分形的什么特性？

练习 4 利用公式（32-1）计算 Koch 曲线，Minkowski 香肠的维数。

定义 Weierstrass 函数如下：

$$W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k x), \quad \lambda > 1, 1 < s < 2$$

实验 3 对不同的 s 值，画出 Weierstrass 函数的图像。

解：画出 Weierstrass 函数的图像如图 32-4。

练习 5 观察图像的不规则性与 s 的关系，由此猜测 Weierstrass 函数图像的维数与 s 的关系。

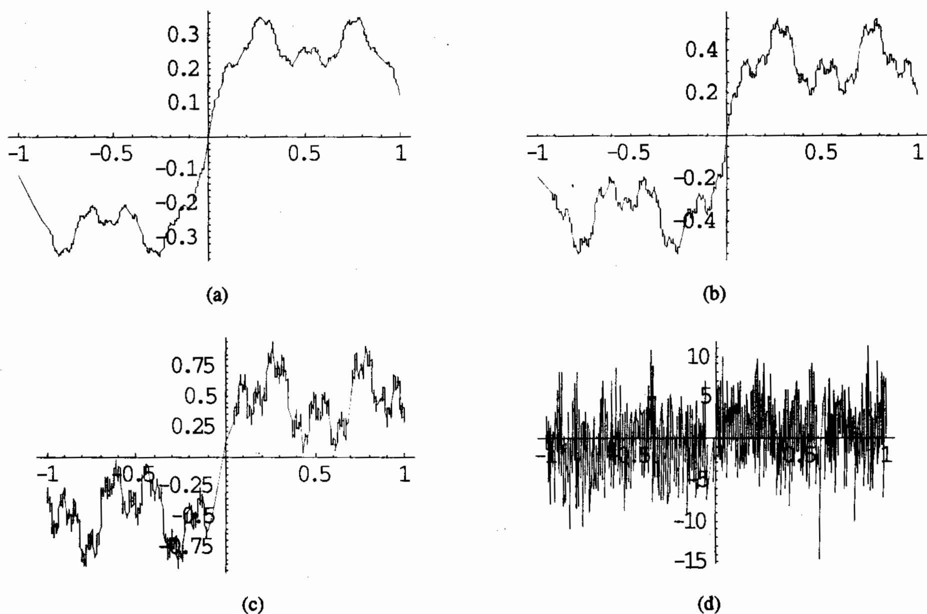


图 32-4 Weierstrass 函数的图形

(a) s=1.0；(b) s=1.25；(c) s=1.5；(d) s=2.0。

32.2 Julia 集与 Mandelbrot 集

早在 19 世纪就有一些数学家对复变函数的迭代进行研究。然而，直到 20 世纪 80 年代，B. Mandelbrot 才将复变函数的迭代与分形联系起来，并绘制出了第一张以他的名字命名的引人入胜的分形图形。复变函数的迭代由此再一次成为数学家的热点研究问题。

Julia 集与 Mandelbrot 集来自非线性映射 $x \to x^2 + \mu$。实际上，从单峰映射

$$x \to f(x) = \lambda x(1-x)$$

经过变换可得

$$x \to f^*(x) = x^2 + \mu$$

给定初始复数 Z_0，考虑如下的迭代：

$$Z_{k+1} = Z_k^2 + \mu,\quad k = 0,1,2,\cdots \tag{32-2}$$

其中 Z_k，$k = 0,1,2,\cdots$ 为复数，μ 为（复）常数。

对于给定的初始点 Z_0，迭代序列 $\{Z_k\}_{k=0}^{\infty}$ 有可能有界，也可能发散到无穷。令 j_μ 是使得迭代序列 $\{Z_k\}_{k=0}^{\infty}$ 有界的所有初值 Z_0 构成的集合，即

$$j_\mu = \{Z_0 \mid \text{迭代序列}\{Z_k\}_{k=0}^{\infty}\text{有界}\} \tag{32-3}$$

我们称 j_μ 在复平面上构成的集合为 Julia 集。对不同的参数 μ，Julia 集的形状也会不同。特别地，$\mu = 0$ 对应的 Julia 集为单位圆盘。

如果固定初值 Z_0 则对不同的参数 μ，迭代序列 $\{Z_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的有界性也不相同。令 M_{Z_0} 是使得迭代序列 $\{Z_k\}_{k=0}^{\infty}$ 有界的所有参数值 μ 构成的集合，即

$$M_{Z_0} = \left\{\mu \middle| \text{迭代序列}\{Z_k\}_{k=0}^{\infty}\text{有界}\right\} \tag{32-4}$$

则称 M_{Z_0} 在复平面上构成的集合为 Mandelbrot 集。

现在考虑这样一个问题：在复平面上，使$Z \to Z^2+\mu$确定的过程成为有界的，那么复数μ（它是复动力系数的参数）将怎样分布在复平面上？

尽管映射是简单的，但要想了解如此复数μ构成的点集，并非易事，还是要借助计算机绘图的手段才能对它产生直观的了解。

为了便于在计算机上绘出 Julia 集与 Mandelbrot 集，令$Z_K = x_k + iy_k, \mu = p+iq$，则(32-2)式可改写为

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k^2 - y_k^2 + p \\ y_{k+1} = 2x_k y_k + q \end{cases}, \quad k=0,1,2,\cdots \tag{32-5}$$

记$r_k = x_k^2 + y_k^2$，则 Julia 集为使得序列$\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$有界的初始点(x_0, y_0)构成的集合，Mandelbrot 集为使得序列$\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$有界的参数(p,q)构成的集合。Julia 集与 Mandelbrot 集会是什么样子？如果没有计算机的帮助，你是很难想象的。下面，我们给出这两种集合的计算机作图法。

Julia 集绘制方法：

(1) 设定初值p,q，一个最大的迭代次数N，图形的分辨率的大小a,b和使用的颜色数K（如K=16）（或者给定灰度级L）；

(2) 设定一个上界值$M \geqslant \max(2, \sqrt{p^2+q^2})$；

(3) 将矩形区域$R := \{(x,y) | -M \leqslant x,y \leqslant M\}$分成$a \times b$的网格，分别以每个网格点$(f_i, g_i)$，$f_i = -M + \frac{2M}{a} \times i, g_i = -M + \frac{2M}{b} \times j$，$i=0,1,\cdots,a, j=0,1,\cdots,b$作为初值$(x_0,y_0)$作迭代（实际上，只需对满足$x_0^2+y_0^2 \leqslant M^2$的初始点迭代）。如果对所有$n \leqslant N, x_n^2 + y_n^2 \leqslant M^2$，则将图形的$(i,j)$像素点用黑色显示。否则，如果从迭代的某一步$n_0$开始有$x_{n_0}^2 + y_{n_0}^2 \leqslant M^2$，则用第$n_0 \bmod K$种颜色显示相应像素（或者用相应的灰度级显示）。

Mandelbrot 集绘制方法：

(1) 设定一个最大的迭代次数N，图形的分辨率的大小a,b和使用的颜色数K（如$K=16$）（或者给定灰度级L）。

(2) 设定一个上界值$M \geqslant 2$。

(3) 将矩形区域$R := \{(p,q) | -M \leqslant p,q \leqslant M\}$分成$a \times b$的网格，分别以每个网格点$(f_i, g_i)$，$f_i = -M + \frac{2M}{a} \times i, g_i = -M + \frac{2M}{b} \times j$，$i=0,1,\cdots,a, j=0,1,\cdots,b$作为参数值作迭代（实际上，只需对满足$p^2+q^2 \leqslant 4$的初始点迭代）。每次迭代的初值均取为$(x_0,y_0)=(0,0)$。如果对所有$n \leqslant N, x_n^2 + y_n^2 \leqslant M^2$，则将图形的$(i,j)$像素点用黑色显示。否则，如果从迭代的某一步$n_0$开始有$x_{n_0}^2 + y_{n_0}^2 \leqslant M^2$，则用第$n_0 \bmod K$种颜色显示相应像素（或者用相应的灰度级显示）。

实验 4 绘制 Julia 集的图形。

解：选取初值$p=0.27334, q=0.00742$，Julia 集的图形如图 32-5。

练习 6 对不同的参数(p,q)：(0,1)，(–1,0)，(0.11,0.66)，(–0.10281,0.95723)，(–1.25,–0.01)观察 Julia 集的变化。取 Julia 集的不同局部放大，你能看到某种自相似现象吗？

实验 5 绘制 Mandelbrot 集的图形。

解：Mandelbrot 集的图形如图 32-6。

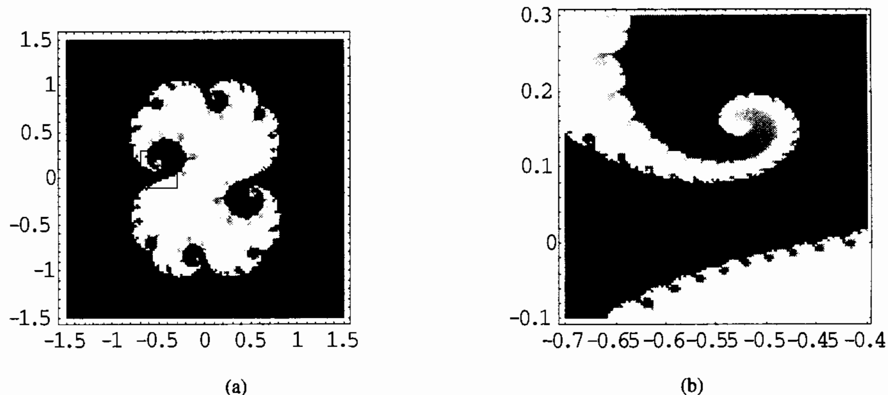


图 32-5 Julia 集的图形

(a) Julia 集的图形；(b) Julia 集的局部放大图形

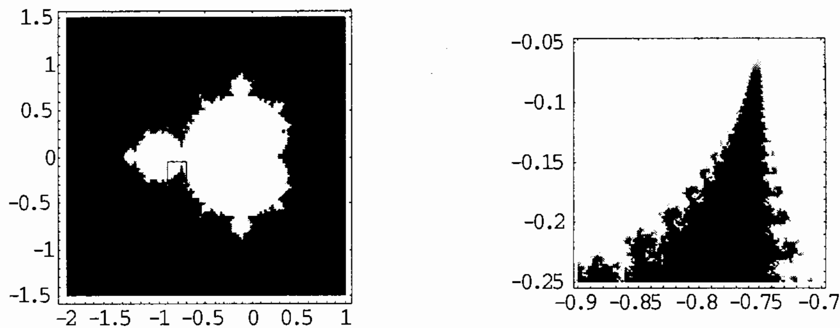


图 32-6 Mandelbrot 集的图形及其局部放大图形

练习 7 任意选取 Mandelbrot 集的一个局部将其放大，然后再将放大图形的不同局部放大，由此观察 Mandelbrot 集与 Jilia 集有何关系。

练习 8 选取参数 μ 位于 Mandelbrot 集的不同部位，观察相应的 Julia 集的形状的变化。

Julia 集与 Mandelbrot 集可以推广到高阶情形。一般地，考虑迭代

$$Z_{k+1} = Z_k^n + c\text{，}\quad k = 0,1,\cdots$$

使得迭代（32-5）有界的初值 Z_0 构成 n 阶 Julia 集，对固定的参数 Z_0，使得迭代（32-5）有界的参数 c 构成 n 阶 Mandelbrot 集。

练习 9 试画出三阶、四阶及五阶 Julia 集与 Mandelbrot 集，并通过放大不同局部观察它们的自相似性。

32.3 迭代函数系统

迭代函数系统简记 IFS(Iterated Function System)，这是分形绘制的典型重要方法。它的最早论述似乎是由 Hutchinson(1981 年)给出的。IFS 的基本思想并不复杂，它认定几何对象的全貌与局部，在仿射变换的意义下，具有自相似结构。这样一来，几何对象的整体被定义之后，选定若干仿射变换，将整体形态变换到局部。并且这一过程可以迭代地进行下去，直到得到满意的造型。在现实中，具体技巧相当重要。例如，这些仿射变换的选取，往往由操作者通过交互方式在计算机上逐个调整来实现。当注重几何对象的总体形态时，IFS 是相当成功的。在不

同的局部之间有着高度的相关性，这是有待改进的地方。

32.3.1 混沌游戏

现在让我们在平面上作一个绘图游戏，在纸上任意设定 3 个点，分别记为 A,B,C。游戏的规则是：任意取第 4 个点，记为 Z_1。现在假想你有一枚硬币，你的投掷有时使它成正面，有时则成反面，也有时侧立（虽然概率较小）。当你投掷一次硬币之后，如果它呈正面，则在纸上画出 Z_1和 A 的中点，记为 Z_2；如果它呈反面，则画出 Z_1和 B 的中点，记为 Z_2。如果它呈侧立状态，则画出 Z_1和 C 的中点，记为 Z_2。总之，我们画出了一个新的点 Z_2。以后的每一步都重复这一做法，也就是说，在第 n 步画出一点记为 Z_{n+1}，使得

$$Z_{n+1}=\frac{Z_n+A}{2}\text{，当硬币成正面}$$

$$Z_{n+1}=\frac{Z_n+B}{2}\text{，当硬币反正面}$$

$$Z_{n+1}=\frac{Z_n+C}{2}\text{，当硬币呈侧立}$$

当这一游戏长时间地做下去，设想能做上百万次，去掉开始时的少数几个点，看看纸上的点集呈现什么样的图形。当然，百万次的实验，既或 3s 在纸上出现一个新的点，不停地做也得一个多月。

如果我们按照上述步骤迭代下去，最终得到的图形会是什么样子呢？如果迭代仅仅只有一千次或一万次，你将会看到乱七八糟的一片。因此有人把这个游戏称为“混沌游戏”。但当迭代次数在一百万次以上时，图形将渐渐开始清晰。图 32-7 给出了迭代一亿次的结果。

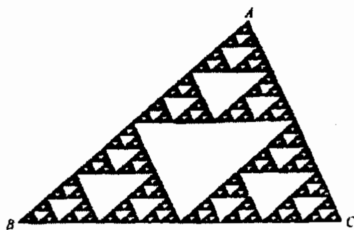


图 32-7 混沌游戏的图形

32.3.2 迭代函数系统

上述绘图游戏中的迭代即是 IFS 迭代的一般提法是：

给定一组（仿射）变换 ω_i

$$\omega_i(x,y)=(a_{11}^i x+a_{12}^i y+b_1^i, a_{21}^i x+a_{22}^i y+b_2^i)\text{，}\quad i=1,2,\cdots,n$$

以及相应的一组概率 $p_1,\cdots,p_n(p_1+\cdots+p_n=1,p_i>0)$。对于任意选取的初始值 $Z_0=(x_0,y_0)$，以概率 p_i 选取变换 ω_i，作迭代 $Z_{n+1}=(x_{n+1},y_{n+1})=\omega_i(x_n,y_n)$ $n=0,1,\cdots$，则点列 $Z_n, n=0,1,\cdots$ 收敛的极限图形称为一个 IFS 吸引子。利用 IFS 迭代不仅可以生成许多有趣的分形图形，而且可以应用于分形图像的压缩。下面，给出 IFS 迭代绘制分形的方法。

设计算机屏幕的可视窗口为 $V=\{(x,y)|x_{\min}\leqslant x\leqslant x_{\max},\ y_{\min}\leqslant y\leqslant y_{\max}\}$，按分辨率大小的要求将 V 分成 $a\times b$ 的网格，网格点为 (x_i,y_i)，这里

$$x_i = x_{\min} + (x_{\max} - x_{\min}) i / a, \quad i = 0,1,\cdots,a$$
$$y_i = y_{\min} + (y_{\max} - y_{\min}) j / b, \quad j = 0,1,\cdots,b$$
用V_{ij}表示矩形区域$\{(x,y) | x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, \quad y_i \leqslant y \leqslant y_{i+1}\}$。假设我们采取具有$L$（如$L$=256）级灰度的黑白图像绘制，总共的迭代次数为$N$，其中落于区域$V_{ij}$中的点的个数为$\mu_{ij}$。再记$\mu = \max \mu_{ij}$，$i = 0,1,\cdots,a-1$，$j = 0,1,\cdots,b-1$，则像素$(i,j)$的灰度$G(i,j)$与落于$V_{ij}$中的点数成正比

$$G(i,j) = -\mu_{ij} \cdot \mu \times L$$

于是给出了 IFS 迭代产生的分形的L级灰度图像。

回顾前面介绍的混沌游戏中的分形生成，归纳起来有三个步骤：

(1) 给出仿射变换 $\omega_1(Z) = \frac{1}{2}(Z+A), \omega_2(Z) = \frac{1}{2}(Z+B)$，$\omega_3(Z) = \frac{1}{2}(Z+C)$；

(2) 给出概率向量$(p_1, p_2, p_3), p_i > 0, p_1 + p_2 + p_3 = 1$；

(3) 通过一个迭代过程绘制了 Sierpinski“地毯”。

实验 6 如果把三个概率分别取为$p_A = p_B = p_C = \frac{1}{3}$，则迭代一百万次的图形如何？

解：迭代一百万次的图形如图 32-8。

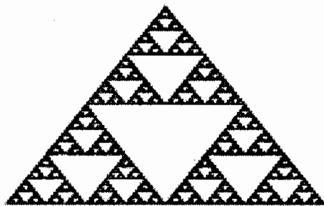


图 32-8 IFS 迭代的图形

练习 10 再取一组其它的概率值绘制相应的图形，结果又如何？据此，你认为概率的选取对最终的极限图形(IFS 吸引子)有没有影响？概率的作用是什么？

练习 11 给定仿射变换

$$\omega_1(Z) = sZ + 1, \omega_2(Z) = sZ - 1$$

以及相应的概率$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$，其中 s,Z 均为复数。取$s = 0.5 + 0.5i$，绘制相应 IFS 迭代的吸引子的图形。取不同的 s，观察图形的变化。

练习 12 考虑两个更一般的变换

$$\omega_1(Z) = \sqrt{Z-C}, \omega_2(Z) = \sqrt{Z+C}$$

以及相应的概率$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$，其中C,Z均为复数。取不同的参数 C（如$C = i$，$C = -1$，$C = 0.11 + 0.66i$等）。观察图形的变化。你能发现什么现象？

32.3.3 IFS 生成分形的典型例子

实验 7 Cantor 树形。设Z_1, Z_2, Z_3表示复数，在平面上它们不在同一直线上。考虑仿射变换

$$\omega_j(Z) = \frac{1}{3}(Z + 2Z_j), \; j = 1,2,3$$

及概率向量$(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，画出迭代的图形。

解：IFS 的吸引子为图 32-9 所示的图形。

图 32-9　Cantor 树形

由于它直观上像一棵树，而且分叉形式为 Cantor 三分集的结构，故称之为 Cantor 树形。

实验 8　Julia 集。在前面已介绍过绘制 Julia 集的方法，这里基于 IFS 的思想，利用所谓反迭代方法对 Julia 集合进行绘制。记$F(Z)=Z^2+C$，Z,C为复数。设Z_0是给定的点，我们寻找Z使得$F(Z)=Z^2+C=Z_0$，由此给出两个变换：

$$\omega_1(Z)=\sqrt{Z-C}\quad,\omega_2(Z)=-\sqrt{Z-C}$$

取概率向量为 (0.5,0.5)。这时通过 IFS 产生的吸引子就是 Julia 集，也就是那些通过$F(Z)=Z^2+C$迭代不收敛于原点也不发散至无穷的点集。

解：绘出不同的C值所对应的 Julia 集。

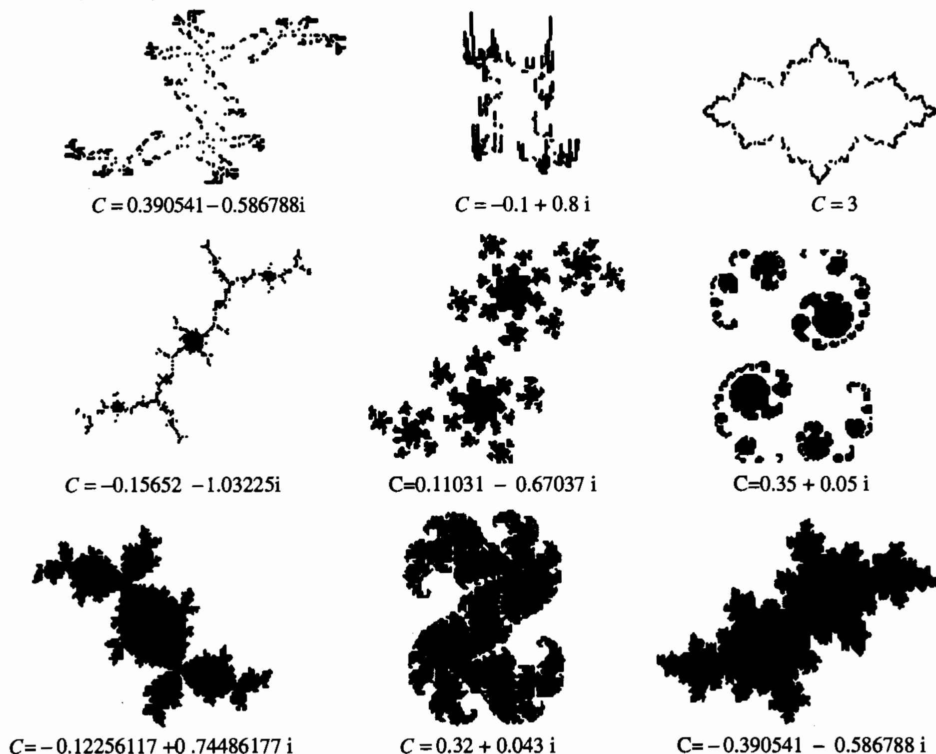


图 32-10　IFS 产生 Julia 集

实验 9　带梗的植物叶子。稍复杂的例子是利用 IFS 方法绘制带梗的植物叶子（如图 32-11）。这个例子之所以典型，是由于它除了植物的叶子是通过三个仿射变换及相应的概率向量决定之

外，还附加了“画出梗”的条件。把这一个条件也写成一个仿射变换$\omega_0(x)=L$，并相应地增加一个概率分量。如果仿射变换集$\{\omega_j : j=0,1,\cdots,N\}$的概率向量为$(p_0,p_1,p_2,\cdots,p_n)$，$0\leqslant p_0<1$，那么令$\widetilde{p_j}=p_j/(1-p_0)$，于是$(\widetilde{p_1},\widetilde{p_2},\cdots,\widetilde{p_n})$是$\{\omega_j : j=1,2,\cdots,N\}$相应的概率向量。Barnsley 等给出的例子是

$$\omega_j\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\cos\theta & -\delta\sin\varphi\\ r\sin\theta & \delta\cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix},\ j=1,2,3,4$$

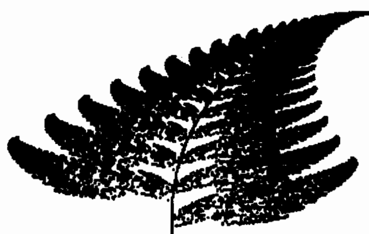


图 32-11　带梗的叶子 IFS 图形

式中各参数的数值表示在表 32-1 中给出，其中r,θ,s,φ的含义为

r：沿x轴方向缩放的倍数；

θ：x轴逆时针方向的旋转角度；

s：沿y轴方向缩放的倍数；

φ：y轴逆时针方向的旋转角度。

h,k表示平移的坐标值。变换$\omega_0(x)$产生点集L，本实验中它起的作用是绘出叶子的梗。

表 32-1　仿射变换的参数值

参数 / 变换	h	k	θ	φ	r	s	概率
ω_0	0.0	0.0	0	0	0.0	0.16	0.005
ω_1	0.0	1.6	-2.5	-2.5	0.85	0.85	0.8
ω_2	0.0	1.6	49	49	0.3	0.34	0.0975
ω_3	0.0	0.44	120	-50	0.3	0.37	0.0975

附　Mathematica 程序

1. 实验 1 的程序

```
kochsnow[ptlist_List] := Block[{tmp = {}, i, pnum = Length[ptlist]},
For[i = 1, i < pnum, i = i + 1, tmp = Join[tmp, {ptlist[[i]], ptlist[[i]]*2/3 +
  ptlist[[i + 1]]/3, (ptlist[[i]] + ptlist[[i + 1]])/2 + {ptlist[[i]][[2]] - ptlist[[i + 1]][[2]],
  ptlist[[i + 1]][[1]] - ptlist[[i]][[1]]}*Sqrt[3]/6,ptlist[[i]]/3 + ptlist[[i + 1]]*2/3, ptlist[[i +
1]]}]]; tmp]
inko01 = {{0, 0}, {1, 0}};
Show[Graphics[Line[Nest[kochsnow,inko01,5]],AspectRatio->Sqrt[3]/6]];
```

2. 实验 2 的程序

```
minkowski[ptlist_List] := Block[{tmp = {}, tmp1, i, pnum = Length[ptlist]},
For[i = 1, i < pnum, i = i + 1,
```

```
        tmp1 = {ptlist[[i]][[2]] - ptlist[[i + 1]][[2]], ptlist[[i + 1]][[1]] - ptlist[[i]][[1]]}/4;
        tmp = Join[tmp, {ptlist[[i]], ptlist[[i]]*3/4 + ptlist[[i + 1]]/4 + tmp1,
              ptlist[[i]]/2 + ptlist[[i + 1]]/2 + tmp1, ptlist[[i]]/2 + ptlist[[i + 1]]/2,
              ptlist[[i]]/2 + ptlist[[i + 1]]/2 - tmp1, ptlist[[i]]/4 + ptlist[[i + 1]]*3/4 - tmp1,
                          ptlist[[i]]/4 + ptlist[[i + 1]]*3/4, ptlist[[i + 1]]}]]; tmp]
mk1[ptlist_List]:=Block[{tmp={ptlist[[1]][[2]]-ptlist[[2]][[2]],ptlist[[2]][[1]]-
ptlist[[1]][[1]]}/4},{ptlist[[1]], ptlist[[1]]*3/4 + ptlist[[2]]/4, ptlist[[1]]*3/4 + ptlist[[2]]/4 + tmp,
ptlist[[1]]/2 + ptlist[[2]]/2 + tmp, ptlist[[1]]/2 + ptlist[[2]]/2, ptlist[[1]]/2 + ptlist[[2]]/2 - tmp,
ptlist[[1]]/4 + ptlist[[2]]*3/4 - tmp, ptlist[[1]]/4 + ptlist[[2]]*3/4, ptlist[[2]]}]
mk2[ptlist_List] := Block[{tmp = {}, i, pnum = Length[ptlist]},
  For[i = 1, i < pnum, i = i + 1, tmp = Join[tmp, mk1[{ptlist[[i]], ptlist[[i + 1]]}]]]; tmp]

in01 = {{0, 0}, {1, 0}};
Show[Graphics[Line[Nest[minkowski, in01, 4]], AspectRatio -> 1/GoldenRatio]];
Show[Graphics[Line[Nest[mk2, in01, 4]], AspectRatio -> 1/GoldenRatio]];
```

3. 实验 3 的程序

```
lambda = 3; nmax = 30; s = 1.5;
Plot[Sum[lambda^((s - 2)*k)*Sin[lambda^k*x], {k, 1, nmax}], {x, -1, 1}];
```

4 实验 4 的程序

```
julia[x_, y_, lim_, cx_, cy_] := Block[{z, ct = 0}, z = x + I*y;
While[(Abs[z] < 2.0) && (ct < lim), ++ct; z = z*z + (cx + I*cy);]; Return[ct];]
julia2 = Show[julia1, Graphics[Line[{{-0.7, -0.1}, {-0.3, -0.1}, {-0.3, 0.3},
            {-0.7, 0.3}, {-0.7, -0.1}}]]];
```

5. 实验 5 的程序

```
iter[x_, y_, lim_] := Block[{c, z, ct}, c = x + I*y; z = c; ct = 0;
              While[(Abs[z] < 2.0) && (ct < lim), ++ct; z = z*z + c;]; Return[ct];]
mandelbrot2 = Show[mandelbrot1,
Graphics[Line[{{-0.9, -0.25}, {-0.7, -0.25}, {-0.7, -0.05}, {-0.9, -0.05}, {-0.9, -0.25}}]]];
```

6. 实验 6 的程序

```
p1 = 1/3; aaa = 1/2 + I 1 // N; f1[z_] := (z + aaa)/2;
p2 = 1/3; bbb = 0 // N; f2[z_] := (z + bbb)/2;p3 = 1/3; ccc = 1 // N; f3[z_] := (z + ccc)/2;
f[z_] := Block[{tmp}, tmp = Random[];
Which[tmp < p1, f1[z], tmp < p1 + p2, f2[z], True, f3[z]]];Array[mu, {150, 150}];
IFSshow[z0_, shrange_List, divi_List, nmax_] :=
  Block[{i, j, z = z0, a = divi[[1]], b = divi[[2]], temp1, temp2, mumax = 0},
             For[i = a, i >= 1, i--,
                For[j = b, j >= 1, j--,mu[i, j] = 0]];
            For[i = nmax, i >= 1, i--,
temp1 = Floor[divi[[1]]*(Re[z] - shrange[[1]][[1]])/(shrange[[2]][[1]] -shrange[[1]][[1]])] + 1;
      temp2 = Floor[divi[[2]]*(Im[z] - shrange[[1]][[2]])/(shrange[[2]][[2]] -
```

```
                    shrange[[1]][[2]])] + 1; mu[temp1, temp2]++; z = f[z];];
    For[i = a, i >= 1, i--,For[j = b, j >= 1, j--,mumax = Max[mumax, mu[i, j]]]];
    mu1 = Table[GrayLevel[1 - N[mu[j, i]]/mumax], {i, a}, {j, b}];
    Show[Graphics[RasterArray[mu1]]] ]
IFSshow[0 + I 0, {{-0.1, -0.1}, {1.1, 1.1}}, {150, 150}, 100000];
```

7. 实验 7 的程序

```
p1 = 1/3; aaa = 1/2 + I 1 // N; f1[z_] := (z + 2*aaa)/3;
p2 = 1/3; bbb = 0 // N; f2[z_] := (z + 2*bbb)/3;
p3 = 1/3; ccc = 1 // N; f3[z_] := (z + 2*ccc)/3;
f[z_] := Block[{tmp}, tmp = Random[];
     Which[tmp < p1, f1[z], tmp < p1 + p2, f2[z], True, f3[z]]];Array[mu, {150, 150}];
IFSshow[z0_, shrange_List, divi_List, nmax_] :=
  Block[{i, j, z = z0, a = divi[[1]], b = divi[[2]], temp1, temp2, mumax = 0},
        For[i = a, i >= 1, i--,
        For[j = b, j >= 1, j--,mu[i, j] = 0]];
          For[i = nmax, i >= 1, i--,
      temp1 = Floor[divi[[1]]*(Re[z] - shrange[[1]][[1]])/(shrange[[2]][[1]] -
                    shrange[[1]][[1]])] + 1;
      temp2 = Floor[divi[[2]]*(Im[z] - shrange[[1]][[2]])/(shrange[[2]][[2]] -
                    shrange[[1]][[2]])] + 1; mu[temp1, temp2]++; z = f[z];];
    For[i = a, i >= 1, i--,
          For[j = b, j >= 1, j--, mumax = Max[mumax, mu[i, j]]]];
    mu1 = Table[GrayLevel[1 - N[mu[j, i]]/mumax], {i, a}, {j, b}];
    Show[Graphics[RasterArray[mu1]]]      ]
IFSshow[0 + I 0, {{-0.1, -0.1}, {1.1, 1.1}}, {150, 150}, 100000];
```

8. 实验 8 的程序

```
ComplexTrajectory[z_, c_, init_:0, n_] := Show[Graphics[{PointSize[.025],
    Point[{Re[z],Im[z]}], Thickness[.0001],Line[Map[{Re[#],Im[#]} &,
     NestList[#^2 + c &,Nest[#^2+c &,If[Precision[z] < Infinity, z, N[z]], init], n]]]}],
    PlotRange->All, Axes->Automatic]
JuliaIIM[c_, n_] := Show[Graphics[
  Map[{Point[{Re[#], Im[#]}], Point[-{Re[#], Im[#]}]} &,
   Drop[NestList[If[Random[Integer] == 1, 1, -1] Sqrt[# - c] &,0.2, n + 50], 50]]]]
chop[z_] := (Round[600 Re[z]] + I Round[600 Im[z]]) / 600.
Attributes[chop] = Listable;
JuliaIIMHistogram[c_, n_] := Show[Graphics3D[Map[
   Line[{{Re[#], Im[#], 1}, {Re[#], Im[#], Count[temp, #]}}] &,
   Union[temp = chop@Drop[NestList[
     If[Random[Integer] == 1, 1, -1]   Sqrt[# - c] &, .2, n+40], 40]]]],
   Boxed->False, BoxRatios->{1,1,1/3}, PlotRange->All];
```

```
JuliaIIMHistogram[-0.1 + 0.8 I, 1000];
JuliaIIMf[r_, n_] := Show[Graphics[
    Map[{Point[{Re[#],     Im[#]}], Point[{Re[#],     -Im[#]}],
          Point[{1-Re[#], Im[#]}], Point[{1-Re[#], -Im[#]}]} &,
      Drop[NestList[.5 + If[Random[Integer]==1, 1, -1] *
                        Sqrt[.25 - #/r] &,   0.2, n + 50], 50]]],
Axes->None, Ticks->{{0,1}, Automatic}]
JuliaIIMf[3, 500];
orbitcheck[z_, c_, iters_] := (s = z; i = 0;
    While[++i <= iters && Abs[s = s^2 + c] < 2];
     If[i == iters+1, {Re[z], Im[z]}*#& /@ {1,-1}, {}])
(* One of x0, y0 should be 0 *)
FilledJuliaSet[c_, meshx_Integer, meshy_Integer, x0_, x1_, y0_, y1_, iters_:20] :=
Show[Graphics[{PointSize[.002], Point /@ Flatten[
Outer[orbitcheck[#1 + I #2, N[c], iters]&,
   Range[x0, x1, (x1-x0)/meshx], Range[y0, y1, (y1-y0)/meshy]], 2]}],
AspectRatio->(ymax=Max[Abs[{y0,y1}]])/(xmax=Max[Abs[{x0,x1}]]),
PlotRange->{{-xmax,xmax}, {-ymax,ymax}}];
c = -.12256117 + .74486177 I; (* rabbit *)
FilledJuliaSet[c, 230, 195, -1.31, .52, 0, 1.11, 30];
c =.32 + .043 I ;(* 11-cycle dragon *) FilledJuliaSet[c, 160, 210, -.85, .80, 0, 1.12, 80];
c = -0.390541 - 0.586788*I   (* Siegel disk *);
FilledJuliaSet[c, 230, 165, -.77, 1.42, 0, 1.03, 30];
c = .35 + .05 I;FilledJuliaSet[c, 230, 165, -.77, 1.42, 0, 1.03, 20];
c = 0.11031 - 0.67037 I;FilledJuliaSet[c, 230, 165, -.77, 1.42, 0, 1.03, 20];
c = -0.15652 - 1.03225I;FilledJuliaSet[c, 230, 165, -.87, 1.2, 0, 1.23, 20];
```

9. 实验 9 的程序

```
MatrixNorm[A_] := Max[Sqrt[Eigenvalues[Transpose[A].A]]];
{A1, A2, A3, A4} = {{{.85, .04}, {-.04, .85}},{{-.15, .28}, {.26, .24}},
                        {{0.2, -.26}, { .23, .22}},{{0, 0 }, { 0,.16}} };
Map[MatrixNorm, {A1, A2, A3, A4}];
{fixed1, fixed2, fixed3, fixed4} = {Inverse[A1 - IdentityMatrix[2]] . {0, -1.6 },
            Inverse[A2 - IdentityMatrix[2]] . {0,   -.44},
            Inverse[A3 - IdentityMatrix[2]] . {0, -1.6 },
            Inverse[A4 - IdentityMatrix[2]] . {0, 0 } };
BarnsleyFern[n_] := Show[Graphics[Map[Point, NestList[
      Which[ (r = Random[Integer, {1,100}]) <= 85,   A1.# + {0, 1.6},
            r <= 92,   A2.# + {0,   .44},r <= 99,   A3.# + {0, 1.6},r == 100, A4.# ] &,
      {0,0}, n]], PlotRange->All]]
BarnsleyFern[28000] ;
```

实验三十三　函数迭代与混沌

在前面的实验中我们看到，利用一些简单的迭代格式可以求解方程（组），同时还可以产生非常复杂而漂亮的分形图形。在本实验中我们将看到，迭代还可以产生类似于随机行为的一种非常古怪的现象，我们把这种现象称之为混沌。

实际上，混沌与分形是密不可分的。混沌中包含着分形，分形中包含着混沌。它们是一对孪生兄弟。本实验我们将从简单的函数迭代出发，使读者认识混沌现象及其所蕴含的规律性。

33.1　基本理论

在系统探索混沌现象之前，我们给出一些基本概念。

设$f(x)$是一个定义在实数域上的实值函数，如果存在u使得$f(u)=u$，则称u为$f(x)$的不动点。我们用$u \to u$表示这事件。如果所有附近的点在迭代过程中都趋向于某个不动点，则该不动点成为吸引点，有时也称该不动点是稳定的。如果所有附近的点在迭代过程中都远离它而去，则该不动点成为排斥点，有时也称该不动点是不稳定的。例如，0与1是$f(x)=x^2$的不动点。0是吸引点，因为从$0<x_0<1$的初值出发，迭代序列都收敛到0。而1是一个排斥点，因为从$0<x_0<1$的初值出发，迭代序列收敛到0，而从$x_0>1$的初值出发，迭代序列发散到无穷。

如果$f(u_1)=u_2, f(u_2)=u_3, \cdots, f(u_k)=u_1$，且$u_j \ne u_1, j=2,\cdots,k$，则$u_1,u_2,\cdots,u_k$形成一个$k$循环。用$u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_k \to u_1$记这个事实。$u_1$成为一个$k$周期点，$u_1,u_2,\cdots,u_k$成为一个周期轨道。显然，不动点就是周期为1的周期点。类似于不动点，如果所有附近的点在迭代过程中都远离它而去，则该周期点成为排斥点。如果点u最终落在某个循环之中，则称它是一个预周期点。例如，1是$f(x)=x^2-1$的预周期点。

33.2　函数的迭代

给定某个初值，反复作用于同一个函数的过程称为迭代。函数$f(x)$的迭代过程如下：

$$x_0, x_1=f(x_0), x_2=f(x_1), \cdots, x_n=f(x_{n-1}), \cdots$$

它生成了一个序列$\{x_n\}$，称为迭代序列。

许多由递推关系给出的数列，都是迭代序列。例如数列

$$x_0=1, x_n=1+\frac{1}{1+x_{n-1}} \quad (n=1,2,\cdots)$$

是由函数$f(x)=1+\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{2+x}{1+x}$取初值为1所得的迭代序列。

定理　设函数$f(x)$满足：

(1) 对任意$x\in(a,b), f(x)\in(a,b)$；

(2) $f(x)$在(a,b)内可导，且存在常数L使得$|f'(x)| \leqslant L<1$。

则当初值$x_0\in(a,b)$时，由$f(x)$生成的迭代序列收敛。

在迭代函数 $f(x)$ 连续的条件下，如果迭代序列收敛，则它一定收敛于方程 $x=f(x)$ 的根。该方程的根也称为函数 $f(x)$ 的不动点。

设 x^* 为 $f(x)$ 的不动点，$f'(x)$ 在 x^* 的附近连续，若 $|f'(x)|<1$，则称不动点 x^* 是稳定的；若 $f'(x^*)=0$，则称不动点 x^* 是超稳定的。在超稳定点 x^* 附近，迭代过程 $x_{n+1}=f(x_n)$ 收敛到 x^* 的速度是非常快的。

对函数的迭代过程，我们可以从几何图形来直观地显示它。在 xOy 平面上，先作出函数 $y=f(x)$ 与 $y=x$ 的图像，对初值 x_0，在曲线 $y=f(x)$ 上可确定一点 P_0，它以 x_0 为横坐标，过 P_0 引平行 x 轴的直线，设该直线与 $y=x$ 交于点 Q_1，再过 Q_1 作平行 y 轴的直线，它与曲线 $y=f(x)$ 的交点记为 P_1，重复上面的过程，就在曲线 $y=f(x)$ 上得到点列 $P_1,P_2,\cdots$，如图 33-1 不难知道，这些点的横坐标构成的序列 $x_0,x_1,x_2\cdots,x_n,\cdots$ 就是迭代序列。若迭代序列收敛，则点列 $P_1,P_2,\cdots$，趋向于 $y=f(x)$ 与 $y=x$ 的交点 P^*，因此迭代序列是否收敛，可以在图上观察出来。这种图因其形状像蜘蛛网而被称为迭代的“蜘蛛网”图。

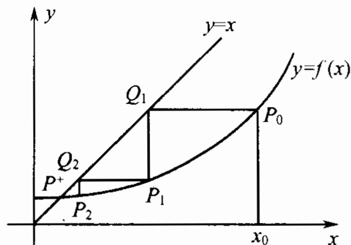


图 33-1　迭代的“蜘蛛网”图

实验 1　取初值为 5.5，画出分式线性函数 $f(x)=\dfrac{25x-85}{x+3}$ 的迭代图形。

解：分式线性函数 $f(x)=\dfrac{25x-85}{x+3}$ 的迭代序列为：6.1764, 7.5641，9.8543，12.5528，14.7125，15.9668，16.5642，16.8218，16.9280，16.9711，16.9884，16.9953，16.9981，16.9992，16.9997，16.9998，16.9999，17，17，17。

图 33-2 显示了分式线性函数 $f(x)=\dfrac{25x-85}{x+3}$ 取初值为 5.5 的迭代过程，从图中可以看出该迭代是收敛的，且收敛到不动点 17。

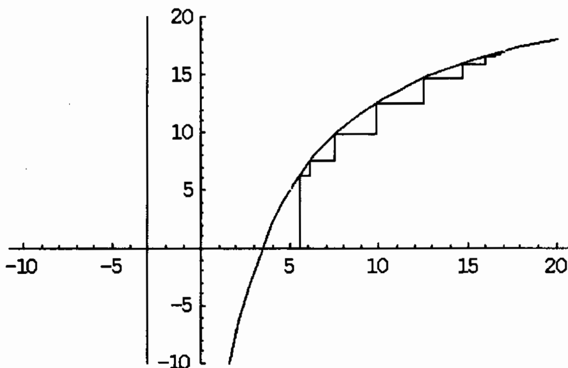


图 33-2　$f(x)=\dfrac{25x-85}{x+3}$ 的迭代图形

练习 1 通过观察图 33-2 或通过改变初值重画 $f(x)=\dfrac{25x-85}{x+3}$ 的蜘蛛网图，你能否说明为什么该函数迭代的收敛速度与初值的选取关系不大？对于其它收敛的分式线性函数的迭代，是否有类似的结论？

迭代序列若不收敛，它可能出现两种情况：

(1) 迭代次数充分大时，迭代序列出现周期性重复。即存在自然数 N，$k>0$，使 $x_{N+k}=x_N$，这样迭代序列便成为

$$x_0,x_1,\cdots,x_N,x_{N+1},\cdots,x_{N+k-1},x_N,x_{N+1},\cdots,x_{N+k-1}\cdots$$

此时，$x_N,x_{N+1},\cdots,x_{N+k-1}$ 称为周期为 k 的循环；而初始点 x_0 为预周期点。

实验 2 对函数 $f(x)=-2+\sin 1.5x$ 取初值 $x=0$ 的迭代，画出其蜘蛛网图。

由图 33-3 可判断出该迭代得到了一个周期为 2 的循环，0 是该循环的一个预周期点。

(2) 序列没有规律、杂乱无章，称之为混沌。

实验 3 画出函数 $f(x)=-2+\sin 5x$ 取初值 -0.7 的迭代图。

由图 33-4 可看出该迭代产生了混沌。

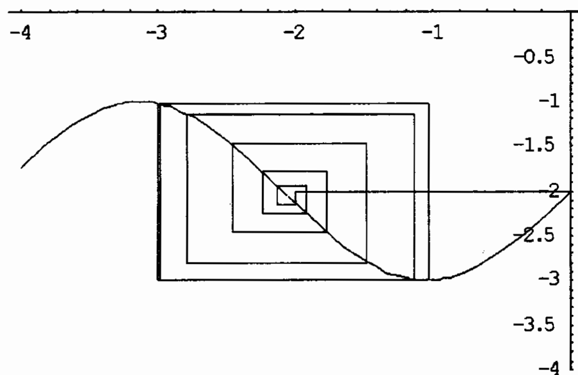


图 33-3 迭代出现循环

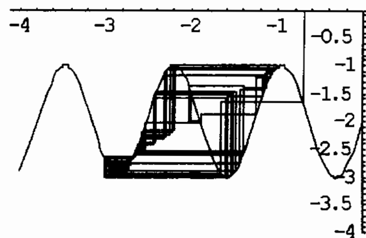


图 33-4 迭代产生了混沌

混沌具有两个特性：非随机性和对初始值的敏感性。若初始值产生微小的误差，则该误差随迭代次数呈指数型增加，因此尽管迭代序列由初值和迭代函数完全确定，但随迭代次数的增加，它与随机数列并无多大差别，故混沌又称作确定性的随机运动。

练习 2 通过观察图形进一步了解函数 $f(x)=a+\sin bx$ 的迭代（多取几组参数及初值）。

练习 3 下列函数的迭代是否会产生混沌？

(1) $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}\\ 2(1-x), & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{a}{x}\right)$

下面我们将研究形如 $f(x)=ax(1-x)$ 的二次函数的迭代

$$x_{k+1}=f(x_k)=ax_k(1-x_k),\ k=0,1,\cdots \tag{33-1}$$

这里，$a\in[0,4]$ 是一个参数。

实验 4 画出函数 $f(x)=ax(1-x)$ 的迭代图。对几组不同的参数值 a，观察迭代序列是否收敛，并比较结果。

解：取 $x_0=0.2$，下面取不同的 a 值进行观察：

(1) $a=0.7$，如图 36-5 迭代序列单调减趋于 0。

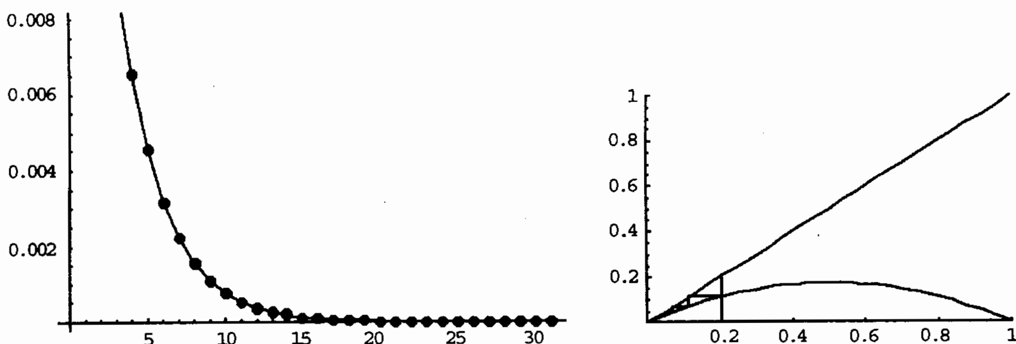


图 33-5 $a=0.7$，$f(x)=ax(1-x)$ 的迭代图

(2) $a=2.9$，如图 33-6 迭代序列上下震荡，趋向于不动点 $(a-1)/a$。

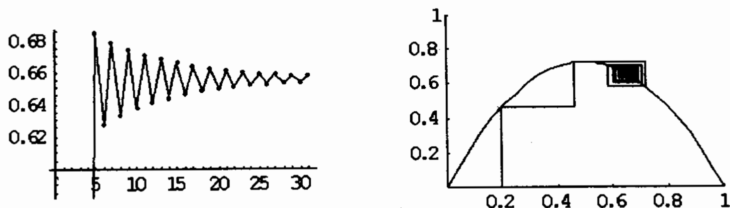


图 33-6 $a=2.9$，$f(x)=ax(1-x)$ 的迭代图

(3) $a=3.4$，如图 33-7 迭代序列经过一段时间的调整，开始在两个近似为 0.42 和 0.82 的值之间上下振荡。这类振荡为 2－循环，一旦进入这种模式，就容易预测 a_n 的值。

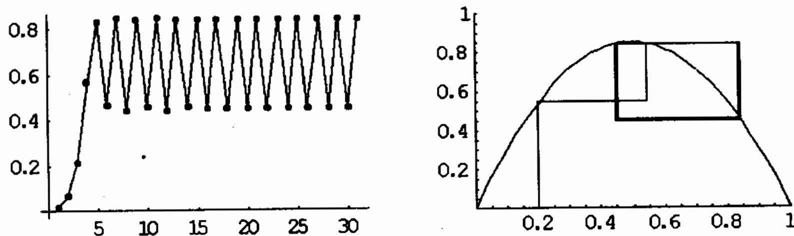


图 33-7 $a=3.4$，$f(x)=ax(1-x)$ 的迭代图

(4) $a=3.55$，如图 33-8 迭代序列出现了周期为 4 的振荡，即 4－循环。

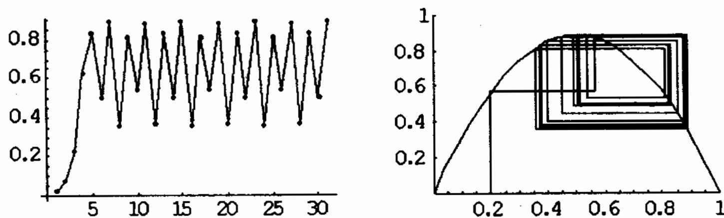


图 33-8 $a=3.55$，$f(x)=ax(1-x)$ 的迭代图

注意，当参数a变化时，从收敛到唯一不动点（1－循环）到2—循环，再从2－循环到4－循环，这样的分裂行为称为分叉。

(5) $a=3.7$，如图33-9迭代序列不再呈现出稳定的周期性，也不具有任何可预测的模式。

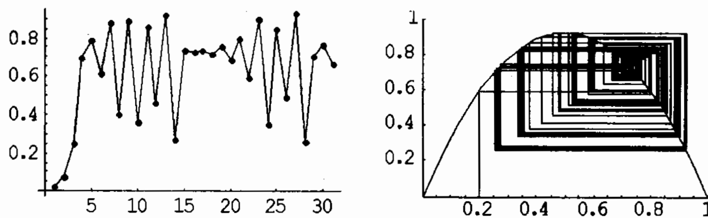


图 33-9　$a=3.7$，$f(x)=ax(1-x)$的迭代图

从蜘蛛网图看到，迭代数列在区间$(0,1)$内跳来跳去，而且表现出对初始条件非常敏感的依赖性。

练习 4　取参数$a=0.8$，并使用不同的初值x_0。你能找出一个吸引的不动点吗？一个排斥的不动点吗？哪些初值收敛到吸引的不动点？哪些初值使序列发散到无穷？取不同的初值$a=1, a=1.6, a=2, a=2.5$回答同样的问题。

练习 5　找出一个a值，它对应的迭代具有2周期点。这种性质依赖于初值吗？你能找到多个a值具有这种性质吗？

练习 6　你能对任意的k找到一个a值，使得它对应的迭代具有k周期点吗？哪些k值能给出k周期点？在每种情况下，结果是否依赖于初值的选取？

（请对$3.4 \leqslant a \leqslant 3.6$和$3.6 \leqslant a \leqslant 4$的值进行验证）。

练习 7　如果某个a值能给出周期点，它是否一定是吸引的周期点？你能否找到排斥的周期点？

练习 8　根据前面的一系列练习，试着从理论上分析：$f(x)$的不动点是什么？对哪些a值迭代收敛到每个不动点？哪些初值收敛到不动点？哪些初值导致发散？对周期点作类似的分析。

33.3　Feigenbaum 图

本节我们对不同的a系统地观察迭代（33-1）的行为。

将区间$(0,4]$以某个步长Δa（如$\Delta a=0.04$）离散化。对每个离散的a值作迭代（33-1），忽略前50个迭代值$x_1, x_2, \cdots, x_{50}$，而把点$(a,x_{51}),(a,x_{52}),\cdots,(a,x_{100})$显示在坐标平面上。最后形成的图形称为Feigenbaum图。

实验 5　画出Feigenbaum图，如图33-10所示。

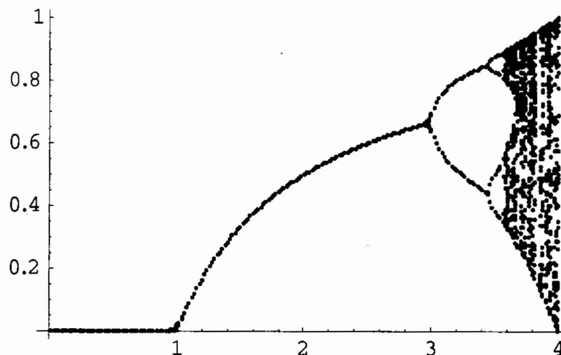


图 33-10　Feigenbaum 图

观察 Feigenbaum 图：在它的左部有一条曲线，这代表迭代具有唯一的吸引不动点。

练习 9 从某一点 a_1 开始，该条曲线分成两条曲线，这说明了迭代的什么性质？迭代的点列是如何运动的？

练习 10 再在下一个分支点 a_2，曲线分成了几个分支？这说明迭代的什么性质？相应的迭代点列是如何运动的？

练习 11 上述分支过程是否一直进行下去？是否存在一个极限的分支点 a_∞？在极限分支点之后，Feigenbaum 图是否显得很混乱？

练习 12 估计出 $a_n, n=1,2,3,4,5$ 等的值。再计算比值 $\delta_n = \dfrac{(a_n - a_{n-1})}{(a_{n+1} - a_n)}$，$n=2,3,4$ 等，它们是否比较接近？由此猜测数列 δ_n 是否会收敛？

练习 13 在 Feigenbaum 图的右部，你应当能看到一个有三条曲线穿过的空白带，它是一个“周期为 3 的窗口”。你能找到其它窗口吗？它们的周期是什么？窗口里有什么图案？这些窗口跟练习 6 中的 k 周期轨道有什么关系？

为了获得更细致的图形，可将 a 的步长再缩小。

Feigenbaum 图对于分析函数 $f(x)=ax(1-x)$ 的迭代行为非常有用，从图 33-10 中可看出：较左部分是一些清晰的曲线段，这说明对该范围内的任一 a 值而言，当迭代进行到 100 次以后，迭代所得的 x_n 只取有限的几个值，表明迭代序列构成了一个循环，其周期等于竖直的直线与图形交点的个数；从左向右，每一段曲线到一定的位置同时一分为二，表明迭代序列的循环周期在这些位置处增长了一倍，因而曲线的这种分叉，被称为倍周期分支，有时也叫做 Pith-Fork 分支；随着 a 的增长，出现分支位置的间隔越来越小，大约在 $a=3.57$ 左右，分支数已看不清楚，这时便认为出现了混沌，由此向右的区域被称为混沌区域，但是并非对所有大于 3.57 的 a，函数迭代都出现混沌。从图 33-10 中可看出，混沌区域中有一些空白带，这些空白带由若干段曲线构成，说明对于相应的 a，迭代出现周期循环，因此这些空白带称为混沌区域中的周期窗口。例如当 $\alpha \approx 3.84$ 时，迭代序列出现了周期为 3 的循环，因此对应于 α 在 3.84 附近的区域就是一个周期为 3 的循环窗口。

综上所述，从 Feigenbaum 图可以看到：

当 $a \in (0,1)$，0 是稳定的不动点；

当 $a \in (1,3)$，0 是排斥点，$(a-1)/a$ 是稳定的不动点；

当 $a \in (3, 3.449489743)$，迭代变为 2-周期轨道，3 是第一个分叉点；

当 $a \in (3.449489743, 3.5669945577391)$，迭代变为 4-周期轨道，3.449489743 是第二个分叉点；

…………

当 $a \in (3.5669945577391, 4)$，迭代进入混沌区域。

33.4 混沌的特性

从极限分支点之后，Feigenbaum 图显得很杂乱，似乎没有任何规律。实际上，对任何初始值做迭代都会得到同样的结果，这就是所谓的混沌现象。迄今为止，混沌并没有确切的数学定义。但它具有一些基本特性，如对初值的敏感性以及某种无序性，由此产生类似于随机的现象。下面，以 $a=4$ 为例来说明迭代（33-1）具有这些特征。

33.4.1 对初值的敏感性

所谓一个迭代对初值是敏感的意思是，无论两个初值如何接近，在迭代过程它们将渐渐分开。这是任何一个混沌系统都具有的特性之一，这种特性使得混沌系统会产生似乎是随机的、没有规律的现象。下面我们考察迭代

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n), n = 0,1,\cdots \tag{33-2}$$

是否具有这种性质。

实验 6 任取两个初值使得它们之间的差的绝对值不超过 0.1，在迭代过程中它们逐渐分开吗？如果两个初值之间的差的绝对值不超过 0.01,0.001，结果会如何？由此得出，函数 $f(x) = 4x(1-x)$ 的迭代对初值是否敏感？

解：在同一坐标面上作出函数的不同初值的迭代图如图 33-11。

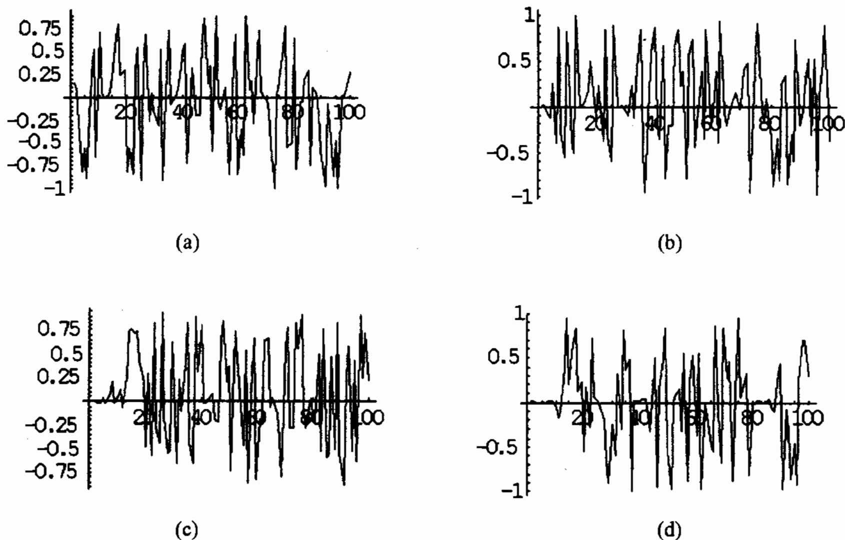


图 33-11 函数 $f(x) = 4x(1-x)$ 的迭代对初值的敏感性

(a) $|x_0^{(2)} - x_0^{(1)}| = 0.05$ 的迭代图；(b) $|x_0^{(2)} - x_0^{(1)}| = 0.005$ 的迭代图；

(c) $|x_0^{(2)} - x_0^{(1)}| = 0.0005$ 的迭代图；(d) $|x_0^{(2)} - x_0^{(1)}| = 0.00005$ 的迭代图。

从图 33-11 可看出，函数 $f(x) = 4x(1-x)$ 的迭代对初值是敏感的。

33.4.2 混沌不是随机的

从上面的实验可以看到，一个简单的、确定的二次迭代可以产生非常复杂的、看似随机的行为。但是，混沌不等于随机。实际上，在混沌区域之内，蕴涵这许多有序的规律。这正验证了哲学上的名言：有序中包含了无序，无序中包含着有序。

实验 7 从不同的初值 $x_0 \in (0,1)$ 出发作的迭代（33-2）。统计迭代点列中分别落于区间 $(0,\frac{1}{2})$ 以及区间 $(\frac{1}{2},1)$ 中的点的个数。

解：作出迭代点列的直方图如图 33-12。

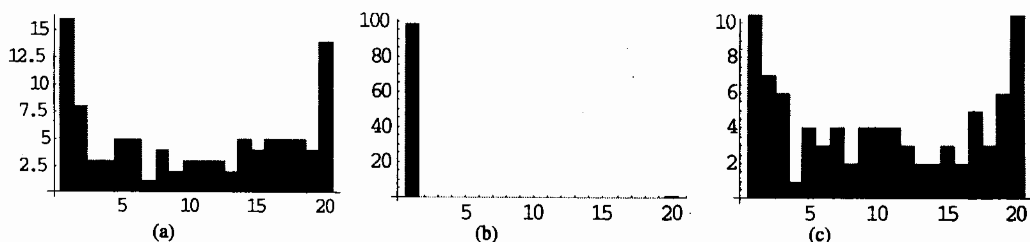


图 33-12　不同的初值下迭代点列的统计直方图

(a) $x_0 = 0.4$；(b) $x_0 = 0.5$；(c) $x_0 = 0.8$。

练习 14　从实验 7 得到的结果是随机吗？进一步，将(0,1)区间分成任意等份，统计迭代点列中分别落于不同的等份区间的点的个数。结论又如何？在区间[0,1]的各种划分中，是否有一些区间即使在大量的迭代之后也不包含任何迭代点？

另一个说明混沌不是随机的事实是，混沌区域有许多有序的窗口。将这些窗口放大可以看到令人振奋的自相似现象，同时还有许多周期轨道。

练习 15　实验 7 确定迭代（33-2）的一个 2 周期点。该周期点是吸引点还是排斥点？找出该周期点的一个有理逼近（误差尽量小）做初值，利用（33-2）做迭代，迭代结果是否像一个周期为 2 的循环轨道？

33.5　其它函数的迭代

和函数 $f(x)=4x(1-x)$ 一样有着混沌行为的函数还很多，其中较简单的有"帐篷函数"和"锯齿函数"。"帐篷函数" $T(x)$定义为

$$T(x)=\begin{cases}2x & \text{如果}0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ 2(1-x) & \text{如果}\dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

"锯齿函数" $S(x)$定义为

$$S(x)=\begin{cases}2x & \text{如果}0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ 2x-1 & \text{如果}\dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

容易验证，帐篷函数和锯齿函数有下列关系：

$$T\big(T(x)\big)=T\big(S(x)\big),\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{33-3}$$

练习 16　锯齿函数对初始条件是否敏感？找出锯齿函数的所有周期点。

（提示：把数值表示成二进制形式）

练习 17　帐篷函数对初始条件是否敏感？找出帐篷函数的的所有周期点。

（提示：利用关系式（33-3））

寻找帐篷函数和锯齿函数的周期点相对比较容易。但要求得 $f(x)=4x(1-x)$ 的周期点就要困难许多。如果有一种方法能够在较复杂的函数与较简单的函数之间进行变换，则我们可以借此找出那些难以捉摸的周期点。实际上，如果令

$$h(x)=\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

则

$$f^k(h(x))=h(T^k(x))$$

对任意正整数 k 成立。

练习 18　你能否利用上述关系式求出 $f(x)$ 的 4 个周期点？该周期点是吸引的还是排斥的？

除了函数 $f(x)=4x(1-x)$ 外，还可以观察其它函数的迭代。下面是其中的某几个函数。有兴趣的读者可以对它们的迭代行为进行类似的探讨，并与 $f(x)$ 的迭代行为作比较。

1. $f(x)=a-(x-\sqrt{a})^2$；　　2. $f(x)=x^2-a$；

3. $f(x)=a\sin(x)$；　　4. $f(x)=x^4-a$；

5. $f(x)=\lambda\sin(\pi x)$。

下面让我们来听一听混沌的一个吸引子，一个 2 循环，一个 4 循环，一个 4 循环的声音是什么样子的。

实验 8　选取 x_0 的一个初值（如 $x_0=0.1$），利用（33-2）作迭代得到序列 $x_n, n=0,1,\cdots$，根据 x_0 的大小确定相应的音调的高低。试编程按顺序演奏迭代序列。

33.6　二维迭代与分形

我们称由两个二元函数 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 取初值 (x_0,y_0) 构成的迭代

$$\begin{cases} x_{n+1}=f(x_n,y_n) \\ y_{n+1}=g(x_n,y_n) \end{cases}$$

为一个二维迭代。

二维迭代产生的序列也存在收敛性问题，但一般来说要比一元函数产生的迭代序列的收敛性复杂得多。我们通常借助于图形进行观察，这种图形由二维点列 (x_n,y_n) 构成，亦即二维散点图。

实验 9　由函数 $f(x,y)=y-\sin x$ 与 $g(x,y)=3.1-x$ 取初值为 $(1.2,0)$ 构成的迭代，画出其迭代图。

解：画出二维迭代的散点图如图 33-13。

虽然从图 33-13 中不能断定该序列是否收敛，但我们却发现这个图形本身非常有特点，它有四个形状完全相似的小图形构成，这些小图形之间经过旋转、折叠后形成。

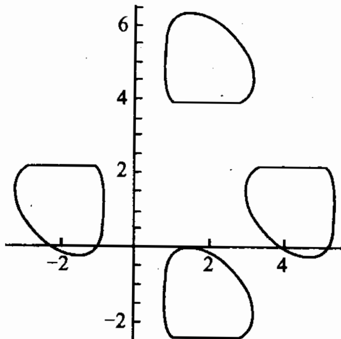


图 33-13　二维迭代的散点图

实验 10 由函数 $f(x,y)=y-\operatorname{sgn}x\sqrt{|bx-c|}$ 与 $g(x,y)=a-x$ 构成的二维迭代称为 Martin 迭代。现观察其当 $a=45,b=2,c=-300$ 时，取初值为(0,0)所得到的二维迭代散点图。

解：画出 Martin 迭代的散点图如图 33-14。

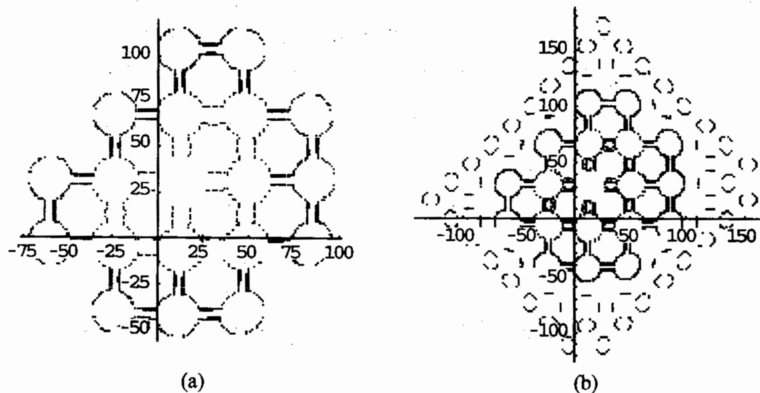


图 33-14　Martin 迭代的二维散点图

(a) 迭代次数 $m=5000$；(b) 迭代次数 $m=26000$。

图 33-14 是著名的 Martin 图形的初期状态，随着迭代次数的提高，图形将会发生奇妙的变化。

练习 19 对实验 10，试着提高迭代次数至 26000，28000，1000000，5000000 等观察图形有什么变化。

练习 20 取参数 a,b,c 为其它的值会得到什么图形？参考表 33-1。

表 33-1　Martin 迭代参数参考表

a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
-1000	0.1	-10	-200	-4	-80
0.4	1	0	-137	17	4
90	30	10	10	100	-10
10	-10	100			

附　Mathematica 程序

1. 实验 1 的程序

```
Clear[f, x, x0, f, t1];f[x_]:= (25 x - 85)/(x + 3);
x0 = 5.5; n = 20; t1 = {};
For[i = 1, i <= n, i++, x00 = N[f[x0]]; x0 = x00;t1 = Append[t1, {i, x0}];]
TableForm[t1, TableHeadings -> {None, {i, "f(x)"}}]
g1 = Plot[f[x], {x, -10,20}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], DisplayFunction -> Identity];
g2 = Plot[x, {x, -10, 20}, PlotStyle -> RGBColor[0, 1, 0], DisplayFunction -> Identity];
r = {}; x0 = 5.5;r0 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Line[{{x0, 0}, {x0, x0}}]}];
For[i = 1, i <= 100, i++,
    r = Append[r, Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Line[{{x0, x0}, {x0, f[x0]}, {f[x0], f[x0]}}]}]];
x0 = f[x0];];
```

```
Show[g1, g2, r, r0, PlotRange -> {-10, 20},playFunction -> $DisplayFunction];
```

2. 实验 2 的程序

```
f[x_] := -2 + Sin[1.5 x];
g1 = Plot[f[x], {x, -4, 0}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], DisplayFunction -> Identity];
g2 = Plot[x, {x, -4, 0}, PlotStyle -> RGBColor[0, 1, 0], DisplayFunction -> Identity];
r = {}; x0 = 0;r0 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Line[{{x0, 0}, {x0, x0}}]}];
For[i = 1, i <= 100, i++,    r = Append[r, Graphics[{RGBColor[0, 0, 1],Line[{{x0, x0}, {x0, f[x0]},
{f[x0], f[x0]}}]}]];x0 = f[x0];];
Show[g1,g2,r,r0,PlotRange ->{-4, 0},DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

3. 实验 3 的程序

```
f[x_] := -2 + Sin[5 x];
g1 = Plot[f[x], {x, -4, 0}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], DisplayFunction -> Identity];
g2 = Plot[x, {x, -4, 0}, PlotStyle -> RGBColor[0,1,0], DisplayFunction -> Identity];
r = {};x0 = -0.7;r0 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Line[{{x0, 0}, {x0, x0}}]}];
For[i = 1, i <= 200, i++,
    r = Append[r,Graphics[{RGBColor[0, 0, 1],Line[{{x0, x0}, {x0, f[x0]}, {f[x0], f[x0]}}]}]]; x0
= f[x0];];
Show[g1, g2, r, r0, PlotRange ->{-4, 0},DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

4. 实验 4 的程序

```
Iter[a_, x0_] :=
  Module[{g1, g2, listg1, listg2, r = {}, var = x0, fvar = a*x0*(1 - x0)},
    f[x_] := a*x*(1 - x); data = NestList[f, 0.02, 30];
    listg1 = ListPlot[data, PlotStyle -> PointSize[0.02], DisplayFunction -> Identity];
    listg2 = ListPlot[data, PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity];
    Show[listg1, listg2, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
    g1 = Plot[f[x],{x,0,1}, PlotStyle ->RGBColor[1, 0, 0], DisplayFunction -> Identity];
    g2 = Plot[x, {x, 0, 1}, PlotStyle -> RGBColor[0, 1, 0], DisplayFunction -> Identity];
    r0 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Line[{{x0, 0}, {x0, x0}}]}];
    For[i = 1, i <= 100, i++,
      r =Append[r, Graphics[{RGBColor[0, 0, 1],
                    Line[{{var, var}, {var, fvar}, {fvar, fvar}}]}]];
      var = fvar; fvar = a*var*(1 - var)];
    Show[g1,g2,r,r0,PlotRange->{{0,1},{0,1}}, DisplayFunction -> $DisplayFunction];]
      a = 0.7; x0 = 0.2; Iter[a, x0]
      a = 2.9; x0 = 0.2; Iter[a, x0]
      a = 3.4; x0 = 0.2; Iter[a, x0]
      a = 3.55; x0 = 0.2; Iter[a, x0]
      a = 3.7; x0 = 0.2; Iter[a, x0]
```

5. 实验 5 的程序

```
Fiegenbaum[n_Integer, a_, x0_] := Module[{plist = {}, i, temp, pilist = {}},
```

```
    For[r = 1, r <= n, r++, temp = x0; plist = {};
            For[i = 1, i <= 50, i++, temp = a*r*temp*(1 - temp)/n];
            For[i = 51, i <= 100, i++, temp = a*r*temp*(1 - temp)/n;
                  AppendTo[plist, {a r/n, temp}]];
AppendTo[pilist,ListPlot[plist,PlotStyle->{PointSize[0.01]},
DisplayFunction-> Identity]]]; Show[pilist, DisplayFunction -> $DisplayFunction];]
Fiegenbaum[200, 4, 0.41]
```

6. 实验 6 的程序

```
sensitivity[n_Integer, x01_, x02_] :=
  Module[{plist = {}, i, temp1 = x01, temp2 = x02},
    For[i = 1, i <= n, i++, temp1 = 4*temp1*(1 - temp1);
      temp2 = 4*temp2*(1 - temp2); AppendTo[plist, {i, temp2 - temp1}];];
    ListPlot[plist, PlotJoined -> True];]
n = 100; x01 = 0.1; x02 = 0.15; sensitivity[100, x01, x02];
n = 100; x01 = 0.1; x02 = 0.105; sensitivity[100, x01, x02];
n = 100; x01 = 0.1; x02 = 0.1005; sensitivity[100, x01, x02];
```

7. 实验 7 的程序

```
distrib[n_Integer, m_Integer, x0_] :=
  Module[{i, temp = x0, g1, f, k, count = Table[0, {i, m}]},
    For[i = 1, i <= n, i++, temp = 4*temp*(1 - temp);
      If[temp == 1, count[[m]]++, count[[Floor[temp*m] + 1]]++]];
    f[k_] := Graphics[{GrayLevel[0.5], Rectangle[{k - 0.5, 0}, {k + 0.5, count[[k]]}]}]; g1 =
Table[f[k], {k, 1, m}];Show[g1, Axes -> True];]
n = 100; m = 20; x0 = 0.4; distrib[n, m, x0]
n = 100; m = 20; x0 = 0.5; distrib[n, m, x0]
n = 100; m = 20; x0 = 0.8; distrib[n, m, x0]
```

8. 实验 8 的程序

```
playchaos[n_Integer, x0_] := Module[{t = {}, i, temp = x0},
    For[i = 1, i <= n, i++, temp = 4*temp*(1 - temp); AppendTo[t, Floor[temp*100]]];
    ListPlay[t, PlayRange -> {0, 100}, SampleRate -> 5]]
n = 100; x0 = 0.1; playchao2[n, x0];
```

9. 实验 9 的程序

```
a = 3.1; xn = 1.2; yn = 0; g = {{xn, yn}};
For[n = 1, n <= 1000, n++,xN = xn; yN = yn; xn = yN - Sin[xN]; yn = a - xN;
g = Append[g, {xn, yn}];];ListPlot[g, AspectRatio -> Automatic];
```

10. 实验 10 的程序

```
martin[m_Integer, a_, b_, c_] := Module[{xn = 0, yn = 0, g = {{0, 0}}},
    For[n = 1, n <= m, n++, xN = xn; yN = yn;
    xn = yN - Sign[xN]*N[Sqrt[Abs[b*xN - c]]]; yn = a - xN;
      g = Append[g, {xn, yn}];];
```

```
    ListPlot[g, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], AspectRatio -> Automatic];]
m = 5000; a = 45; b = 2; c = -300; martin[m, a, b, c]
m = 26000; a = 45; b = 2; c = -300; martin[m, a, b, c]
```

附录　Mathematica 软件简介

Mathematica 软件是一个功能强大的数学软件系统，它主要包括：数值计算、符号计算、图形功能和程序设计 4 个方面的功能，它含有功能强大、种类丰富的内部函数，用户也可以自由地定义自己的函数并扩充到系统函数中。

下面简要列出 Mathematica 系统的主要函数，供使用参考。要进一步掌握和了解 Mathematica 的功能，请查阅系统的在线帮助和参考有关的书籍。

附.1　Mathematica 的启动与退出

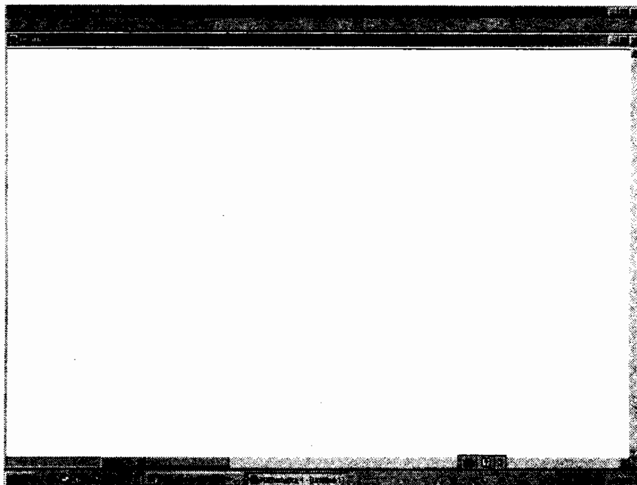
Mathematica 是一个交互式的系统。它的用户界面为图形形式，使用起来很方便，且可以很方便的与其它软件（如字处理软件等）交换信息，图形处理也更直观、方便，使用更广泛。下面的介绍主要以 Mathematica4 版本为基础，其它版本的使用方法类似。

附.1.1　启动与退出

Mathematica 4 安装完毕后，就会在 Windows 98 / 2000 / XP 的开始菜单的“程序”组中建立一个 Mathematica 子组，单击其中的 Mathematica 4 即弹出如图附-1 所示的 Mathematica 主窗口。

在主窗口中，可以开始输入命令进行计算工作。需要注意的是，Mathematica 的计算核心一般不是进入系统后马上启动的，只有在给出了确实的计算指令后才开启，这时屏幕下的提示行会出现“Load kernel: n% complete”等信息。所以 Mathematica 的第一条命令的执行速度会比较慢一些。

退出 Mathematica 和其它 Windows 程序一样，可以用 ALT-F4 组合键，也可以选择 File 菜单中的 Exit 项。



图附-1　Mathematica 的工作窗口

附.1.2 输入命令

进入 Mathematica 后，就可以输入命令。系统解释并执行了你的命令后，将把输入命令编号，前面加上 In[nnn]：=的信息（'nnn' 代表输入命令的序号），输出结果前也将加上提示符 Out[nnn]：=。In 与 Out 以及其后括号中的数字'nnn' 都是 Mathematica 自动生成的，不需专门输入。

特别需要注意的是，输入的 Mathematica 命令并不是以回车符（Enter）结束的。也就是说，您可以一次输入多行的命令，回车并不会使系统执行命令。执行命令的方式是键入 Insert 键或 Shift_Enter 组合键或者按一下执行的快捷按钮。

附.1.3 NoteBook（笔记本）

Mathematica 中的输入与输出都是在 NoteBook 中进行的。每一次输入和输出作为单元（cell）出现，所有的资料，包括文本和图形都被组成有序的单元，通过定制，你可以改变单元的字体、大小、放大缩小图形，你还可以用鼠标选择单元右部的标志线选择一个或一组单元，进行单元的操作。

每次你退出 Mathematica 时，Mathematica 会询问你是否想保存本次工作，你可以根据它的提示进行操作。

附.1.4 复制和剪切

尽管你可以使用 NoteBook 保存自己的工作，但也经常需要将 Mathematica 得出的结果保存到其它文件中，或者将在其它文本编辑器中编辑的命令调到 Mathematica 中执行。这些工作都可以通过 Windows 剪贴板来完成。

附.1.5 使用以前的结果

任何时候都可以在输入表达式里写百分号“%”表示上一次计算的结果。这样就可以方便的使用前面的计算结果构造新的计算。例如，

In[1]:= x^2+2 x*y+5 x*y^2

表示定义一个多项式，则第二个命令可以用“%”代替第一个命令的结果。

In[2]:= %*(x^2+y)

代表将第一个多项式乘以 x^2+y。

还可以用%%表示倒数第二个计算结果。更一般的方法是在百分号后面写一个数，表示以这个数为编号的那一次计算的结果（回忆一下提示符的编号）。这样，前面已经得到的任何结果都可以方便地使用在后面的计算里了。

附.1.6 使用联机求助系统

在使用 Mathematica 的过程中，常常需要了解一个命令的详细用法，或者想知道是否有完成某一任务的函数。联机帮助系统永远是最详细的、最方便的资料库。

1) 运算区的查询

在运算区内输入相应的命令，可以查询内部函数（操作）*的有关信息。

? Name　　　　给出有关 Name 的粗略信息；

?? Name　　　给出有关 Name 的详细信息；

? L*　　　　　给出以 L 开头的所有函数（操作）的全名。

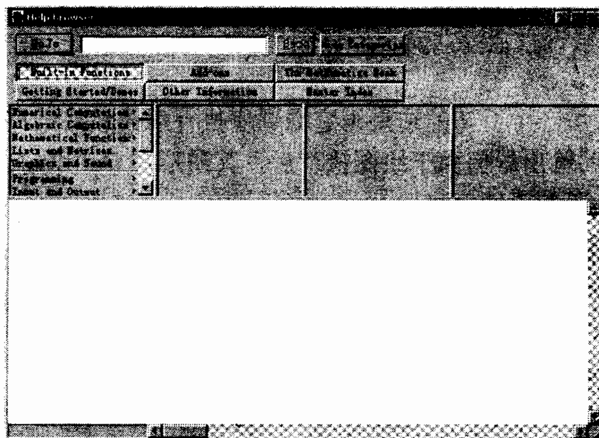
例如：? Log 语句的执行结果为

Log[z] gives the natural logarithm of z (logarithm to base E). Log[b，z] gives the logarithm to base b.

这正是内部函数 Log 的涵义或用法说明。这样可以查询 Mathematica 后台一些有关内容的许多重要信息。此外，你也可以查询自定义的函数的有关信息。

2) Windows 格式的在线查询

在 Mathematica 的工作窗口中，用鼠标点击主菜单中的 help 下的 Help Browser，激活 Help Browser 帮助系统。窗口如图附-2 所示。



图附-2

在 Help Browser 中不但汇集了 Mathematica 所有命令的使用方法，而且包含了其完整的使用手册（约 1500 多页）及 Mathematica 的各种工具栏的使用方法，甚至还附带了多个范例的动画演示程序。Help Browser 共分了 6 大类帮助信息：

Build-in Function　查询 Mathematica 的所有内部命令与函数的使用方法；

Add-ons　查询 Mathematica 所带的函数库（packages）命令与函数的用法；

The Mathematica Book　Mathematica 的完整手册；

Getting Started/Demos　初学者使用说明与范例；

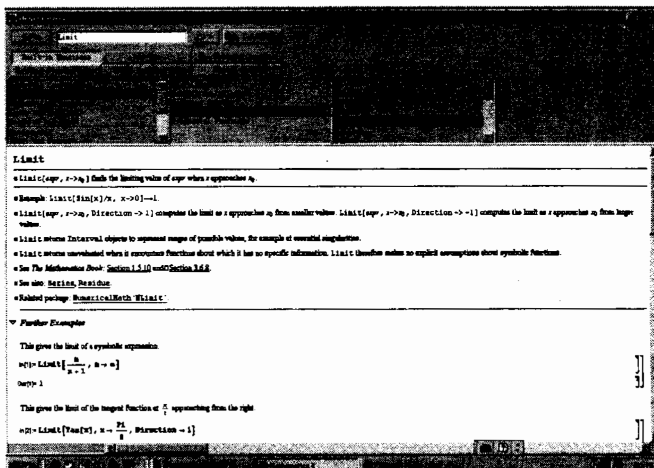
Other Information　其它信息，包括 Mathematica 集成环境的介绍、数学表达式二维格式的输入方法等；

Master Index　用索引的方法查询 Mathematica 关键词。

选择搜索主题的类别之后，输入关键词，单击 GOTO 按钮开始搜寻主题，或者在最左边的选项列表中选择搜索主题类别后，在逐渐缩小查询范围，进行搜索。例如，若要查询 Limit 命令的使用方法，可以直接在 Help Browser 中输入 Limit，再单击 Go To 按钮，或选择 Algebraic Computation-Calculus-Limit 找到有关 Limit 命令的说明，如图附-3 所示。

3) 关于“;”号的使用

Mathematica 语言规定“;”号为其语句分割符，当其后不再有 Mathematica 语句时，其含义为要求系统不再输出该语句的运算结果中 Out 后面的结果；若其后还有其它语句，则认为两



图附-3

语句为并列关系，且最后一个语句的结果为它们顺序执行后的最终结果。请输入语句“1+2”与“1+2;”，比较它们的输出。但由于绘图执行后，其图形在 Out 语句出现前画出，因而图形给出，只是不再有 Out 语句后的内容。

4) 打开文件与打开程序包

主菜单 File 中 Open 的用法与‘<<’的用法：

Open 用于打开已保存的文件；

<< 用于读入 Mathematica 命令编写的程序块或程序包，并同时执行。打开程序块时，给出运行结果；读入程序包时，只是将包中定义的变量与操作函数调入计算机内存，没有其它执行结果。无论哪种情况，Mathematica 编辑区内除了执行结果的有关信息外，不调入任何程序段。

附.1.7 初学者易犯的错误

(1) 大小写错误：主要指系统的内部操作命令及内部函数的首写字母；

(2) 括号错误： 注意大、中、小三种括号在 Mathematica 中各自的使用位置；或括号个数不配对；

(3) 空格符号错误；相乘时一定要加空格或用乘号，变量名之间绝对不能用空格；

(4) 未清除某些变量的先前定义或赋值：当出现一些莫名其妙的结果，或结果复杂时，注意检查是否有这一问题出现。

附.2 数、表达式、函数和变量

Mathematica 的最主要功能是进行数学处理。因此读者应当先了解这个系统关于表达式书写的基本规定，包括最基本的各种数的表示，系统的最常用的各种函数，以及如何书写一般的代数表达式问题。

附.2.1 数的表示和计算

Mathematica 的简单数值类型有整数、有理数、实数和复数。Mathematica 的数分为两大类：一类是直接用数字(和小数点)写出来的数；另一类是系统的内部常数，它们对应着常用的数学

常数。

1. 数和数的计算

Mathematica 和一般的程序设计语言不同的一点是它对于任意数(包括整数、有理数、实数等)永远是精确的，因为用户可以对其精确度进行控制。

Mathematica 的算术运算符包括加减乘除和乘方，它们分别用字符+、-、*、/和^表示。两个整数做加减乘和乘方运算的结果总是整数。

在这里有几个问题要注意：

1) 表示乘法的“*”可以作空格符号代替。在两个整数之间放一个空格就表示求它们的乘积；

2) 算术运算的优先顺序符合一般数学中的习惯，先乘方、再乘除、最后加减。可以用括号改变计算的顺序；

3) 对于一般的算述运算符，连续的几个同级运算从左到右进行，乘方运算的结合顺序不同，是从右到左进行的；

4) 与一般程序设计语言和数学的习惯一样，负号用减号表示，直接写在数的前面。

2. 数学常数

数学中有许多常用的数学常数，例如表示圆周率用的π、表示自然对数的底的 E 等。在 Mathematica 系统里，数学常数都是精确数。下面列出有关的数学常数。

Catalan	Catalan 常数，约为 0.915966
ComplexInfinity	复平面上无穷远点
Degree	角度的度，$\pi/180$
DirectedInfinity	有方向的无穷
E	自然对数的底 $e \approx 2.71828$
EularGamma	欧拉常数 $\gamma \approx 0.577216$
GoldenRatio	黄金分割 $\phi \approx (\sqrt{5}+1)/2 \approx 0.61803$
I	虚单位 i=-1
Indeterminate	不定值
Infinity	无穷大
Pi	圆周率 $\pi \approx 3.14159$

附.2.2 表达式

在 Mathematica 系统里，所有的东西都是表达式，表达式都有一种统一的结构形式，可以用统一的方法处理表达式形式方面的问题。下面介绍与表达式有关的一些操作函数的使用。

1. 与表达式有关的判断

在 Mathematica 系统里对表达式做操作时，尤其是写程序时经常牵涉到一些判断。例如辨别数的大小、表达式的类型、表达式之间的关系等。系统提供了一批表达式类型判别函数，这些函数在表达式符合类型时给出值 True，否则给出值 False。这些函数包括：

NumberQ[表达式]	表达式是否一个数
IntegerQ[表达式]	是否整数
EvenQ[表达式]	偶数
OddQ[表达式]	奇数

PrimeQ[表达式]　　　　　　素数
PolynomialQ[表达式，变量表]　变量表中变量的多项式
VectorQ[表达式]　　　　　　一个表示向量的表
MatrixQ[表达式]　　　　　　一个表示矩阵的二层表
AtomQ[表达式]　　　　　　　是否为简单表达式

这些函数名字的特点是都以 Q 结尾，Mathematica 系统里凡是以 Q 结尾的函数如果不能得到值 True 时就返回值 False。而其它以逻辑值为结果的函数并没有这种性质。

2. 与表达式结构有关的函数

大多数对表可用的结构操作对于一般表达式也可以使用。这样的函数有：First，Last，Rest，Take，Drop，Prepend，Append，Insert，Join 等，系统还提供了另外一类与表达式的结构有关的函数，它们的共同特点在于都是描述如何把某一个函数作用于一个表达式(依据表达式的结构特征)。这些函数及其使用是：

Apply[函数，表]　　把表作为函数的参数表，求值这样得到的表达式.这样做相当于用函数替换表的头。
Map[函数，表达式]　　将函数作用到表达式的第一层的每一个元素上，得到由这样作用的结果构成的表达式。
Map[函数，表达式，整数 n]　　将函数作用于表达式的由顶层直到第 n 层的各层所有的元素上。
Map[函数，表达式，{整数 n}]　将函数作用于表达式的第 n 层所有元素。
MapAt[函数，表达式，位置表]　描述将函数作用于表达式的某一个(或一些)特定元素，被作用的元素由位置表确定。
MapAll[函数，表达式]　　　　将函数作用于表达式的所有层的所有元素。

3. 其它表达式操作函数

Mathematica 系统还提供了一些表达式操作函数，主要有：

Position[表达式，子表达式]　确定子表达式在表达式里出现的位置。

前面在讨论表操作函数时已经介绍过这个函数，它也可以用于一般表达式，得出一个位置的表(也可能是空表)。

Select[表达式，判断函数]　以逻辑性质从表达式的元素中选出满足判断函数的那些子表达式，作成一个新表达式。

4. 关系判断和逻辑表达式

Mathematica 系统也有逻辑表达式。基本的关系运算符包括：

等于	==	例：x==y+1
不等于	!=	x!=a
大于	>	a+1>b
小于	<	x-y<d-2
大于等于	>=	x^2>=n+1
小于等于	<=	x<=a+b

这些运算符还可以连续使用。例如：x>=a>=b 用于判断不增加，x==y==z 全相等，a!=b!=c 全不等如此等等。逻辑表达式如果能够求出值，结果只能是真(在这个系统里用 True 表示)或

者假(在这里用 False 表示)。这两个标识符具有特殊意义，它们也像其它标识符一样可以写在表达式里。系统还提供了把基本关系表达式连接起来的逻辑运算符，包括：

否定	!	例：	!(x>5)
并且	&&		x＝0&&y>3
或者	‖		x==0‖y==0
异或	Xor		Xor[x==0，y==0]
隐含	Implies		Implies[x>0，y>0]

附.2.3　常用的函数

1. 常用的数学函数

Mathematica 系统里定义了许多常用的数学函数，比一般计算机语言里的数学函数多。具体有如下函数：

绝对值函数	Abs[x]
三角函数	Sin[x]，Cos[x]，Tan[x]，Cot[x]，Sec[x]，Csc[x]
反三角函数	ArcSin[x]，ArcCos[x]，ArcTan[x]，ArcCot[x]，ArcSec[x]，ArcCsc[x]
双曲函数	Cosh[x]，Sinh[x]，Tanh[x]，Coth[x]，Sech[x]，Csch[x]
反双曲函数	ArcSinh[x]，ArcCosh[x]，ArcTanh[x]，ArcCoth[x]，ArcSech[x]，ArcCsch[x]
幅角函数	Arg[x]
指数函数	Exp[x]求 e^x
对数函数	Log[a,x](求以 a 为底 x 的对数)或 Log[x](求 x 的自然对数)
最大函数	Max[xl,x2，…]求 xl，x2，…中的最大值
最小函数	Min[x1,x2，……]求 xl，x2，ll…中的最小值
取模	Mod[m,n]求 m/n 的模
取整 1	Round[n]距离 n 最近的整数
取整 2	Floor[n]不大于 n 的最大整数
符号函数	Sign[n]取 n 的符号，-1 为负、0 为零、1 为正
平方根	Sqrt[n]求 $\sqrt{n}$
阶乘	n!　求 n 的阶乘
求近似值函数	N[expr，n]以 n 为精确位数来取 expr 的值

例如：　In[1]：＝N[Pi,5]

　　　　Out[1]：＝3.1416

在 Mathematica 里，把一个函数作用于一个(或几个)表达式的方法是一致的，都是把表达式写在函数名后的方括号里，例如：

In[1]:＝Sqrt[64]

In[2]:＝Exp[3.18]

函数的书写有统一的规矩：

1) 它们都以大写字母开头，后面用小写字母。当函数名可以分成几个段时，每一个段的头一中字母用大写，后面的字母用小写。

2) 函数的名字是一个字符串，其中不能有空格。

3) 应当特别注意，函数的参数表用方括号括起来，不能用圆括号。

4) 有多个参数的函数，参数之间用逗号分隔。

2. 自定义函数

定义函数使用的符号是“:＝”。定义符号的左边是函数名和方括号里说明的自变量，右边是函数的定义表达式，说明函数值应当如何从函数自变量的值计算出来。读者特别应该注意定在定义式左边方括号里自变量名后面的“_”(下划线符号)，在Mathematica系统里这个符号叫做“空白”。自变量名后面的空白符号是必须的，它应紧跟在自变量名的后面，中间不能有空格。例如定义函数：$f(x,y)=x^2+2x+y$

In[1]:＝f[x_，y_]:＝x^2+2 x+y

In[2]:＝f[1.5，1]

Out[2]:＝6.25

附.2.4 变量

(1) Mathematica关于标识符形式的规定和一般程序语言里差不多，标识符应当是由字母开头的字母数字串，可以包含任意多的字母数字，但是不能包含空格或标点符号。

特别注意：abx表示的是一个变量的名字，a，b和x的乘积必须写成a*b*x或a b x。这里的空格不能省略。

Mathematica对于空格使用的规定是：

1) 两个子表达式(表达式中的数、变量、函数式等都是子表达式)之间的空格(一个或多个都一样)或换行符总表示子表达式相乘。

2) 在系统(和我们)能明确判定是相乘的地方可以省略空格，例如在数的后面有数以外的其他表达式，以及在圆括号的前面、后面与其它表达式之间可以不写空格，等等。

3) 在许多地方，如在算数运算符的前后，圆括号、方括号的前后，有没有空格，有几个空格都不改变表达式的意义。

(2) 变量的赋值和替换。像在有些程序设计语言(如FORTRAN和C)里一样，Mathematica用等号“＝”表示给变量赋值，例如把一个多项式作为值赋给变量p1，应当写：

In[4]:＝pl＝5+6x^2+x^3+x^4y

Out[4]:=p1＝5+6x^2+x^3+x^4y

可同时替换多个变量，例如求出p1在x＝1.2，y＝2.34时的值：

In[7]＝p1/.(4x->1.2,y->2.34)

如果一个变量的值不再有用了，可以(而且应当)把它取消，方法是在一个赋值式的右边写一个圆点符号：

In[8]:＝u1＝.

在这个命令执行之后，变量u1的值就不存在了。

附.3 代数式与代数运算

附.3.1 清除

x=. 或Clear[x]，表示取消对x的赋值，它们没有输出结果。一般说来，在使用一些变量前，最好先作这部分工作，这可以避免变量的以前赋值结果影响以后的计算结果。

附.3.2 代数式的几个操作函数

1. 展开与因式分解

除按一般的算术运算外，Mathematica 对多项式还有展开与因式分解的操作，命令格式为：

Expand[表达式]: 表示对表达式作展开运算；

Factor[表达式]: 表示对表达式进行因式分解；

FactorTerms[表达式]: 提出表达式各项中的公因子；

Collect[表达式，x]: 把表达式写成 x 的幂次之和；

p=Expand[(x+2y+1)^2]

2. 化简

Simplify[表达式]：表示把表达式化简。

Factor[x^6-y^6]

Simplify[x^5-1]

Factor[x^5-1]

附.3.3 解方程

所谓求解方程就是设法把方程对于变量取值的限制弄清楚，最好的结果是用不含有变量的表达式把变量的值表示出来。在这个系统里，方程也用含有变量的等式表示，要注意的是在这里等号用连续的两个等于符号"=="表示。方程的两端可以是任何数学表达式。用户可以自己操作规定 Mathematica 系统来求解方程，例如使用移项一类的等价变换规则对方程加以变形、对方程的两端进行整理、把函数作用于方程的两端等等。系统也提供了一些用于求解方程的函数。

Mathematica 有多个命令可以求解一个方程或方程组，如 Solve、Reduce 等。它们均可以用来求方程的精确解。Solve 输出的结果形式为一代入规则列表；Reduce 则给出方程解的组合条件表示形式。

1. 求方程的代数解

最基本的方程求解函数 Solve，它可以用于求解主程(主要是多项式方程)或方程组。Solve 有两个参数，第一个参数是一个方程，或者是由若干个方程组成的表(表示一个方程组)；第二个参数是要求解的变量或变量表。例如，下面的式子对于变量 x 求解方程：$x^4-x^3-6x^2+1=0$

1n[1]:=Solve[x^4-x^3-6x^2+1==0,x]

输入了这个表达式，系统立刻就能计算出方程的 4 个根，求出的解都是精确解(代数根)。对于一般的多项式，这样得出的解常常是用根式描述的复数。方程的解被表示成一个表，表中是几个子表，每一个子表的形式都是{x->…}，箭头后面是方程的一个解。Solve 也可求解多变量的方程或者方程组：

In[2]:=Solve[{x-2y==0，x^2-y==1},{x,y}]

这个表达式求解方程组：

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ x^2-y=1 \end{cases}$$

2. 求方程的数值解

把函数 N 作用到这个结果表达式上，求出方程的数值解。另外，还有两个求数值解的函数。

NSolve[方程或方程组，变量或变量组] 用法和 Solve 相同

FindRoot[方程或方程组，变量或变量组初值]从初值开始搜寻方程或方程组的解

例如：FindRoot[Sin[x]Exp[2x]-Cos[x]==0,{x,0.5}]

FindRot[方程或方程组，变量或变量组范围]在范围内搜寻方程或方程组的解

例如：FindRoot[Sin[x]Exp[2x]-Cos[x]==0,{x,{0,1}}]

3. 求微分方程的解

DSolve[eqns,y[x],x]　解 y[x]满足的微分方程 eqns

例如：求解　In[1]:=DSolve[y'[x]==ay[x],y[x],x]

　　　　　　Out[1]={{y[x]-> c[1]}}

求解

In[2]:=DSolve[{y[x]==ay[x],y[0]==1},y[x],x]

Out[2]={{y[x]->ay[x]}}

附.3.4　和与积

在 Mathematica 中，数学上的和式符号 Σ 用 Sum 表示，连乘符号 Π 用 Product 表示。

求和函数的一般形式为：**Sum[fn，{循环初值，循环终值，循环步长}]**或 **NSum[fn，{循环初值，循环终值，循环步长}]**其中，fn 是和式的通项公式，可为各类初等函数和自定义函数，它能计算有限项或无限项的和。

乘积函数的一般形式为：**Product[fn，{循环初值，循环终值，循环步长}]**或 **NProduct[fn，{循环初值，循环终值，循环步长}]**其中，fn 是乘积的通项公式，可为各类初等函数和自定义函数，它能计算有限项或无限项的积。

Sum[x^n/n!, {n, 0, 5}]　(*计算 $\sum_{n=0}^{5}\frac{x^n}{n!}$ *)

Sum[1/k^3, {k, 1, 10}]　(*计算 $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k^3}$ *)

附.4　Mathematica 的图形功能

Mathematica 图形功能的最重要特点之一是支持作各种函数图形，包括一般显函数的二维、三维函数图形(平面曲线和空间曲面)，参数形式表示的二维和三维图形(平面曲线、空间曲线和曲面)，以及函数的等值线图和密度图等等。图形可以着色、加光照、任意旋转等。系统的作图函数还有许多可选的参数项(称为可选项，后面要详细地讨论)，使用它们可以在作图时指明各种特殊的要求。

附.4.1　基本二维函数作图

最基本的二维函数作图由系统函数 Plot 实现。这个函数的使用形式有两种：

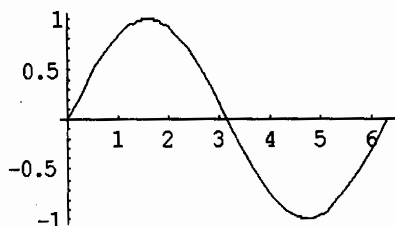
Plot[表达式，(变量，下限，上限)，可选项]

Plot[{表达式，表达式，……}，{变量，下限，上限}，可选项]

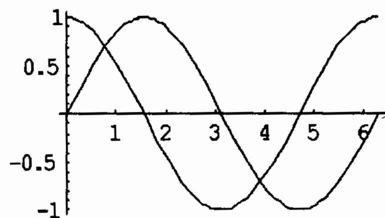
第一个使用形式用于作一个函数表达式的图形，第二个形式用于在一个图里作多个函数表达式{表达式，表达式，…}的图形，这些表达式要放在花括号里面。

例如：In[1]:=Plot[Sin[x],{x,0,2Pi}]

　　　In[2]:=Plot[{Sin[x],Cos[x]},{x,0,2Pi}]



图附-4



图附-5

1. 二维函数作图的可选项

对于任何一个具有可选项参数的函数，在函数使用时如果要指定可选参数，这些可选参数都应当放在所有必要参数的后面。每一个可选项都有一个名字，在使用时用：可选项名的可选项值的形式给名字为可选项名的可选项指定值。下面就具体介绍二维作图函数的有关可选项。

PlotRange　指定 Plot 的作图范围。内部默认值是 Automatic，表示由系统确定作图范围。它的可能取值和意义如下：

All　　画出函数值的全部情况

{下限,上限}　　画出指定范围内函数图形：如{yl,y2}或{{x1,x2},{yl,y2}}

AspectRatlo　　指定作图的纵横，默认为 0.618:l

Axes　　说明是否画坐标轴以及把坐标轴中心放在何处。它的可能取值和意义如下：

Automatic　　表求自动确定坐标轴中心位置(默认值)

None　　不画坐标轴

{x,y}　　表示坐标轴中心位置为(x,y)处

AxesLabel　　说明坐标轴上的标记符号，它的可能取值和意义如下：

None 不作标记(默认值)

{x,y}把横纵坐标轴分别标记为 x 和 y,x 和 y 可为任意用双引号引起的字符序列

Ticks　　规定坐标轴上刻度的位置。它的可能取值和意义如下：

Automatic　　自动确定坐标轴刻度(默认值)

None　　不标出坐标刻度

{xt,yt}　　规定刻度，其中的 xt,yt 可以是 None，表示在一个轴上不做刻度；或者是{t1,t2, …}，表示要求在一个轴上按位置 t1,t2,…, 设置坐标轴刻度。

PlotPoints　　指定计算函数值的(基本)取点数。内部默认值是 15，它的可能取值和意义如下：

x　　用户需要的取点数

MaxBend　　说明表示函数曲线的折线在相邻的沥段之间的最大折角，以度为单位。

PlotDivision　　说明在(基本)初始取点数的基础上细分的限度(最多增加多少中间点)。

PlotStyle　说明用什么样的方式作函数的图形(曲线)。默认值是 Automatic 由系统自动确定构造方式。这时 Plot 用一条黑实线作函数的图形。PlotStyle 的值应当是一个表。在作一个函数表达式的图形时，这个表里可以有一个或者几个描述图素形式的项。可以使用的项包括：

Thickness[t]　描述线的宽度，其中 t 是一个实数，说明要求的画线宽度，这时以整个图的宽度作为 1 计算。

GrayLevel[i]　描述画线时使用的灰度，其中的 i 是一个[0,1]间的数，说明灰度的深浅，其

中 0 表示黑色，1 表示白色。

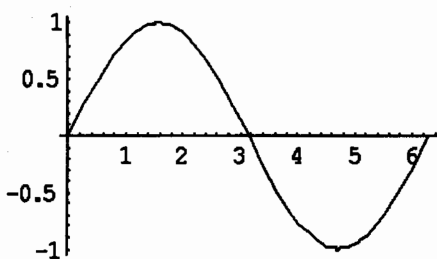
RGBColor[r,g,b]　说明颜色，其中的 r,g,b 是三个取值[0,1]间的数，说明所要求的颜色里红色、绿色、蓝色分别的强度。

Dashing[{d1,d2,…}]　说明用怎样的方式画虚线。其中的 d1,d2,…都是小于 1 的数，说明虚线的分段方式。这时也以图形的宽度为 1。

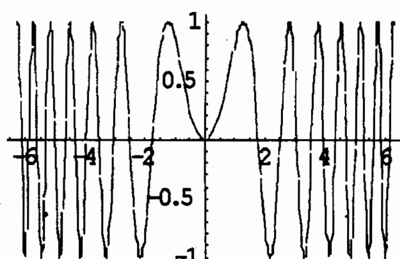
下面举例说明：

In[1]:=Plot[Sin[x],{x,0,2Pi},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0]}]

In[2]:=Plot[Sin[x^2],{x,-2Pi,2Pi},PlotStyle->{GrayLevel[0.5],
　　Dashing[{0.22,0.01}]}]



图附-6



图附-7

2. 二维参数图形

Mathematica 还能方便地画参数形式表示的一元函数的平面图形。使用的函数是 ParametricPlot。它的使用形式也有两种：

ParametricPlot[{x(t),y(t)},{t,下限,上限},可选项]

ParametricPlot[{{xl(t),y1(t)},{x2(t),y2(t)}…},{t,下限,上限},可选项]]

其中 t 可以是任一个变量,x(t)、y(t)、xi(t)、yi(t)等是包含 t 的表达式，它们的意义对于了解数学的人是很清楚的。第一个形式用于作一个函数的图形，第二个形式用于在一张图上作多于一个函数的图形。

ParametricPlot 接受与 Plot 一样的可选项，其作用也一样，请上机观察下例。

ParametricPlot[{Sin[x],Cos[x]},{x,0,2Pi},AspectRatio->Automatic]

ParametricPlot[{Sin[t],Sin[2t]},{t,0,2 Pi}]

附.4.2　基本三维函数作图

最基本的三维作图函数是 Plot3D，它用于作二元函数的三维立体图形。Plot3D 的基本使用形式是：

Plot3D[函数表达式，{变量，下限，上限}，{变量，下限，上限}，可选项]

其中两个变量应该是函数表达式里仅有的两个变量。对于它们在给定区域的每一对取值，函数表达式应当能够求出一个实数值，例如：

In[1]:=Plot3D[x^2Sin[y],{x,-1,1},{y,0,Pi}]

1. 三维函数作图的可选项

函数 Plot3D 也有许多可选项，下面将讨论一些比较常用的可选项的意义和用途。

PlotPoints 说明在给定区域纵横两个方面上中间取点的数目。默认值是 15。可以用任意的整数值说明需要的取点数，或者用{整数，整数}的形式说明在两个方向上分别的取点数。

PlotRange　说明要求的图形显示范围。默认值是 Automatic，表示由系统自动确定

All　要求在所有的地方按照实际情况作图，不切掉任何特殊区域和尖峰

{z1,z2}　作出函数值在[z1,z2]范围的函数图形

{{x1,x2},{y1,y2},{z1,z2}}　作出由这些值确定的空间矩形里的函数图形

PlotLabel　说明图的名称标注。默认值是 None，表示图不加任何名称标注。可以用任何字符串作为图的名字。

AspectRatio 说明整个图的高宽比。默认值是 1。可以说明为任意的数值。

PlotColor　说明是否显示彩色。

True　　图形是彩色的(默认值)

False　　不做彩色图

Boxed　　说明是否绘图形加上一个立体框。默认值是 True 表示加立体框。

BoxRatios　说明图形立体框在三个方向上的长度比。默认值是 1:1:0.4，用{1,1,0.4}表示，可以设定任何观察点。

Mesh　说明在曲面上是否画网格，默认值是 True。可以用 False 取消网格

HiddenSurfurce　曲面被挡住的部分是否隐掉。默认是 True

Shading　在曲面上是否涂阴影(涂色)。默认值是 True 根据函数值的大小用灰度做曲面涂色。在去掉阴影时图完全是白色，只能看到网格。

LightSources　设置照明光源。默认值是设置了三个点光源，分别是红、绿、蓝色的，放在曲面右边 45° 角的地方。

Lighting　说明是否打开已经设置的光源。默认值：False，一旦打开了灯，灯光照射在曲面上，就会产生反射，从而使曲面呈现出色彩。

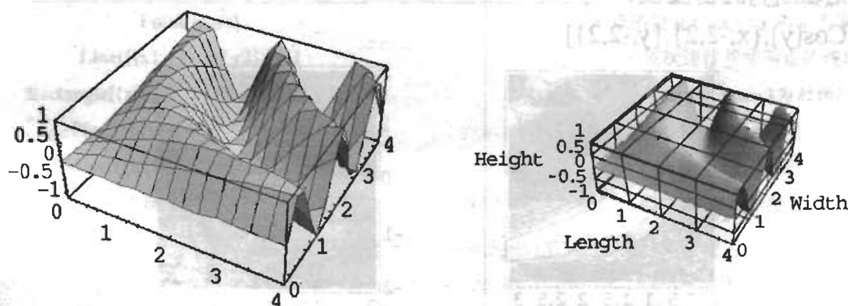
AmbientLight　漫射光设置，默认值是黑色，用 GrayLevel[0]表示，意为没有漫射光。可以用任意灰度或颜色设置任意漫射。

ClipFill　作出的图形中被切掉的那些部分用什么方式填充。默认值是 Automatic，系统用被切掉部分中每个区域的实际函数值确定的颜色或者灰度显示这个区域。其它选择值有：

None　　　表示不做填充

{上填充，下填充}其中的上填充，下填充是颜色或灰度描述，分别说明对于图形的上部和下部被切掉部分的填充方式。

```
Plot3D[Sin[x y], {x, 0, 4}, {y, 0, 4}];
Plot3D[Sin[x y], {x, 0, 4}, {y, 0, 4}, PlotPoints -> 40, Mesh -> False,
    FaceGrids -> All, AxesLabel -> {"Length", "Width", "Height"}];
```



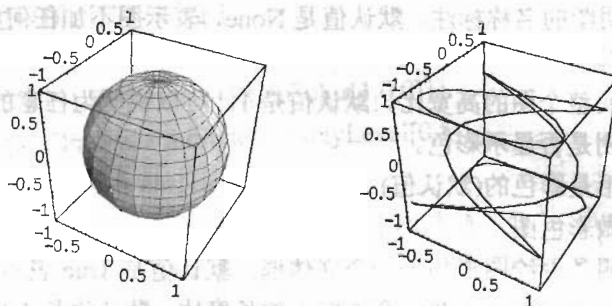
图附-8

2. 三维参数图形

现在用 ParametricPlot3D 函数作一个球面的图形，来说明其具体用法。

ParametricPlot3D[{Sin[u]Cos[v],Sin[u]Sin[v],Cos[u]},{u,0,Pi},{v,0,2Pi}]

ParametricPlot3D[{Cos[5t], Sin[3t], Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi}];



图附-9

函数 ParametricPlot3D 也有许多可选项，不过与 Plot3D 大体相同。

附.4.3 等值线图、密度图

Mathenlatica 系统还提供了另外几个表达式作图函数，其中的 ContourPlot,DensityPlot 能够作二元表达式的等值线图、密度图。还有用数据点作二维和三维图形的函数。

函数 ContourPlot 用于作二元表达式的等值线图，其使用形式是：

ContourPlot[二元表达式，{变量,下限,上限},{变量,下限,上限},可选项]

例如，作 sin(xy)的等值线图：

In[1]:＝ContourPlot[Sin[x y],{x,0,Pi},{y,0,Pi}]

ContourPlot 的可选项有：

PlotPoints　指明在做等值线时每个方向上求值点的个数。默认值 15。可以给它指定任意正整数值。

PlotRange　指明作图时函数值的取值范围。默认值：Automatic,表示自动处理。

A11　处理所有的值

{下限,上限}　指定范围

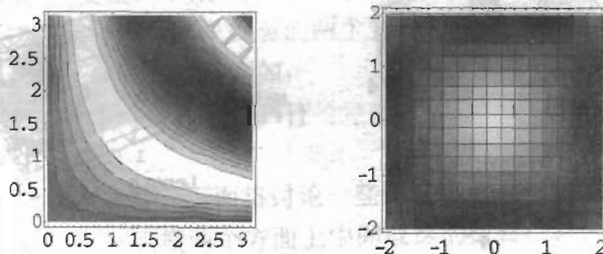
函数 DensityPlot 用于作密度图形，它的使用形式与 ContourPlot 一样。

函数 DensityPlot 用于作二元函数 f[x,y]在区域上的密度图，密度图与等值线图的作用相似。

DensityPlot[f[x,y],{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax},可选项]

例如，作 Cos[x]Cos[y]的密度图：

Density[Cos[x]Cos[y],{x,-2,2},{y,-2,2}]



图附-10

附.4.4 数据作图

Mathematica 也有直接调用数据画图形的命令，如表附-1 所示。

表附-1

画图函数	意 义
ListPlot[{{x1,y1},{x2,y2},…,}]	画出数据点{x1,y1},{x2,y2},…,
ListPlot[{y1,y2,…,yn}]	画出数据点{{1,y1},{2,y2},…,{n,yn}}
ListPlot[数据,PlotJoined->True]	画出一条通过数据点的光滑曲线
Data={{x1,y1,z1},{x2,y2,z2},…,}	三维数据点
ListPlot3D[data]	使用数据画出三维图
ListContourPlot[data]	使用数据画出数据点的等值线图
ListDensityPlot[data]	使用数据画出数据点密度图

请上机实践以下例子：

data=Table[i^(2/3),{i,1,5,0.2}];ListPlot[data];

ListPlot[data,PlotJoined->True];

Table[{Random[],Random[]},{I,12}];ListPlot3D[%];

附.4.5 图形的重新显示和组合

函数 Show 的功能是显示已经做好的图形，使用时可以重新指定一些可选项，使图形按照需要的方式显示出来。例如作图：

In[1]:=g1=Plot[Sin[x],{x,-Pi,Pi}]

In[2]:=g2=Plot[Cos[x],{x,-Pi,Pi}]

如果现在希望用实际的比例尺度重作这两个图,并想它们组合到一张图上,那么输入：In[3]:=Show[g1,g2,AspectRatio->Automatic]便可。

附.4.6 用图形元素作图

使用图形元素作图适合于画结构复杂的图形。在 Mathematica 中也提供了各种二维和三维图形元素，如点、圆弧和立方体等。一般做法是：先用 Graphics[图形元素]作出平面图形表达式，再用 Show[图形表达式]的形式显示完成的图形，如表附-2、表附-3 所示。

表附-2

二维图形元素	几何意义
Point[{x,y}]	点的位置在{x,y},x 和 y 为坐标轴
Line[{{x1,y1},{x2,y2},…}]	依次连接相邻两点的线段
Rectangle[{xmin,xmax},{xmax,ymax}]	以{xmin,xmax}和{xmax,ymax}为对角线坐标的填充矩形
Ploygon[{x1,y1},{x2,y2},…]	以{x1,y1},{x2,y2},…为顶点的封闭多边形
Raster[{{a11,a12},{a21,a22},…}]	灰度颜色的矩阵
Circle[{x,y},r]	圆心在{x,y},半径为 r 的圆
Circle[{x,y},{rx,ry}]	中心在{x,y},长短半轴为 rx 和 ry 的椭圆
Circle[{x,y},r,{t1,t2}]	从弧度 t1 到弧度 t2 的圆弧
Circle[{x,y},{rx,ry},{t1,t2}]	从弧度 t1 到弧度 t2 的椭圆弧
Disk[{x,y},r]	圆心在{x,y}半径为 r 的填充圆

例如（请上机实践）：

<<Graphics′

g1=Graphics[{Line[{-1.5,1.5},{1.5,1.5}],PointSize[0.02],Point[{0,1}],Point[{1,0}]}];

Show[g1];

表附-3

三维图形元素	几何意义
Point[{x,y,z}]	点{x,y,z}
Line[{{x1,y1,z1},{x2,y2,z2},…}]	通过点{x1,y1,z1},{x2,y2,z2},…的线
Polygon[{{x1,y1,z1},{x2,y2,z2},…}]	具有指定角点的填充多边形
Cuboid[{x0,y0,z0},{x1,y1,z1}]	以{x0,y0,z0}和{x1,y1,z1}为对角线的立方体
Text[expr,{x,y,z}]	在{x,y,z}处的文本 expr

例如：

p=table[Point[{Random[],Random[],Random[]}],{24}];

Show[Graphics3D[p]]

附.4.7 制作图形动画

用 Mathematica 制作动画是相当精彩的一部分内容。制作原理非常简单，它只是把 Mathematica 绘制的图一张张快速地显示出来，从而形成动画。下面用一个范例来说明如何制作动画.步骤如下：

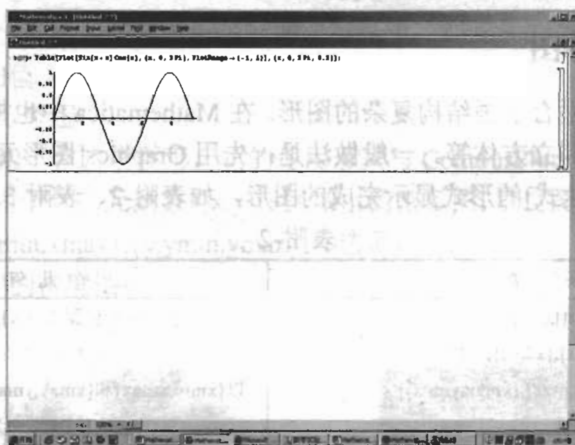
(1) 输入以下语句：

Table[Plot[Sin[x + z]Cos[z], {x, 0, 3Pi},

PlotRange -> {-1, 1}], {z, 0, 2Pi, 0.2}];

(2) 执行以上语句后,Mathematica 便绘制出 32 张图；

(3) 用鼠标左键双击其中的任何一张图，便开始播放动画，如图附-11 所示。



图附-11

注意：在播放动画的时候，在窗口的左下角会显示类似于录音机上的按钮的图标，你可以利用这些按钮实现动画的正向播放、反向播放、暂停及播放速度等操作。如果想停止播放动画，只要用鼠标左键单击工作区内的任意一点即可。

附.5　Mathematica 在微积分中的应用

Mathematica 在微积分中的应用的常用命令如表附-4 下面是一些例子(自己上机实践)。

```
Limit[Sin[x]/x,x->0]
D[Sin[n*x],x]
D[Sin[n x],{x,3}]
Dt[Sin[n*x],x]
Dt[Sin[n*x],x,Constans->n]
Integrate[Log[x],x]
Integrate[Tan[x]*Tan[y],{x,0,1},{y,0,1}]
NIntegrate[Exp[-x^2/2],{x,0,Infinity}]
Series[Exp[x]^(1/2),{x,-1,3}]
Series[Cos[x]Cos[y],{x,0,3},{y,0,3}]
DSolve[y′ [x]==a y[x],y[x],x]
DSolve[{x′ [t]==y[t],y'[t]==x[t]},{x[t],y[t]},t]
```

表附-4　微积分的常用命令

命　令	语句说明
Limit[f[x],x->x0]	求极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$
Limit[f[x],x->x0,Direction->1]	求极限 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$
Limit[f[x],x->x0,Direction->-1]	求极限 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$
D[f,x]	求导数 $\frac{df}{dx}$ (或偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$)
D[f,x1,x2, …]	求偏导数 $\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots(f)$
D{f,{x,n}}	求高阶导数 $\frac{d^n f}{dx^n}$ (或 $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$)
D[f,x,NonConstans->{v1,v2,…}]	求导数 $\frac{df}{dx}$,其中 $v1, v2\cdots$是 x 的函数
Dt[f]	全微分
Dt[f,x]	全导数 $\frac{df}{dx}$
Dt[f,x1,x2,…]	全导数 $\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dx_2}\cdots(f)$
Dt[f,x,Constans->{c1,c2,…}]	全导数 $\frac{df}{dx}$,其中 $c1, c2,\cdots$看作常数
Integrate[f,x]	不定积分 $\int f(x)dx$
Integrate[f,x,y,…]	不定积分 $\int dx\int f(x,y)dy$
Integrate[f,{x,a,b}]	定积分 $\int_a^b f(x)dx$

（续）

命　　令	语 句 说 明
NIntegrate[f,{x,a,b}]	数值积分 $\int_a^b f(x)dx$
Integrate[f,{x,a,b},{y,c,d}]	二重积分 $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$
NIntegrate[f,{x,a,b},{y,c,d}]	数值积分 $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$
Series[f,{x,x0,n}]	展开为幂级数
Dsolve[eqns,y[x],x]	解常微分方程
NDsolve[eqns,y[x],{x,xmin,xmax}]	求常微分方程在区间[xmin,xmax]上的数值解

附.6　Mathematica 在线性代数中的应用

附.6.1　向量与矩阵的定义

向量与矩阵的常用 Mathematica 命令见表附-5，下面给出一些例子。

表附-5　向量与矩阵的定义的常用命令

命　　令	语 句 说 明
Array[a,n]	定义一个 n 维向量
Array[a,{m,n}]	定义一个 m 行 n 列矩阵
Table[f[I],{I,imin,imax,di}]	元素为 $f[I]$ 的向量
Table[f[I,j],{I,imin,imax,di},{j,jmin,jmax,dj}]	元素为 $f[i,j]$ 的矩阵
IdentityMatrix[n]	n 阶单位矩阵

A=Array[a,{2,2}];a[1,1]=2;a[1,2]=3;a[2,1]=4;a[2,2]=1;A

B=Table[1.0,{2},{2}]

IdentityMatrix[{1,2,3}]

附.6.2　矩阵的运算符号和函数

下面列出一些常用的矩阵运算符号和函数，见表附-6。

表附-6

命　　令	意　　义
U.V	向量 U 与 V 的内积
A.B	矩阵 A 与矩阵 B 相乘
Det[M]	计算矩阵 M 的行列式
Transpose[M]	M 的转置矩阵 M^T
Inverse[M]	计算矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1}
Eigenvalues[A]	计算矩阵 A 的全部(准确解)特征值
Eigenvalues[N[A]]	计算矩阵 A 的全部(数值解)特征值

（续）

命　令	意　义
Eigenvectors[A]	计算矩阵 A 的全部(准确解)特征向量
Eigenvectors[N[A]]	计算矩阵 A 的全部(数值解)特征向量
Eigensystem[A]	计算矩阵 A 的全部(准确解)特征值和特征向量
Eigensystem[N[A]]	计算矩阵 A 的全部(数值解)特征值和特征向量

附.6.3　线性方程组求解

在 Mathematica 中求解线性方程组的常用语句如表附-7。

表附-7

解方程组命令	意　义
RowReduce[A]	作行的线性组合化简 A
LinearSolve[A,B]	求解满足方程组 $AX=B$ 的一个解, A 为方阵
NullSpace	求解方程组 $AX=0$ 的基础解系的向量表, A 为方阵

例：已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，计算 A 的秩,并求出方程组 $AX=0$ 的基础解系。

```
A={{1,1,1,1},{1,0,-1,1},{3,1,-1,3},{3,2,1,3}};RowReduce[A]
NullSpace[A]
```

附.7　Mathematica 在概率论与数理统计中的应用

Mathematica 把有关统计、计算或绘图的命令都收集保存在 Statistics 这个函数库中，Statistics 函数库又包含了下列子函数库，它们分别是：

Statistics′ ConfidenceIntervals′　置信区间的计算与分析
Statistics′ ContinousDistribution′　连续分布
Statistics′ DataNanipulation′　数据的分析与运算
Statistics′ DescriptiveStatistics′　描述统计
Statistics′ DiscreteDistribution′　离散分布
Statistics′ HypothesisTests′　假设检验
Statistics′ LinearRegression′　线性回归
Statistics′ NonlinearFit′　非线性拟合

在调用这些子函数库中的命令之前，必须先分别加载它们，如：

```
<< Statistics′ DataNanipulation′
```

如果想加载整个统计函数库时，可以用

```
<< Statistics′
```

命令加载。下面将列出一些常用的命令如表附-8。例：

<< Statistics'

<<Graphics' Graphics'

data={2,4,3,5,4,3,3,6};fre=Frequencies[data]

BarChart[fre];

CumulativeSums[data]

Mean[data]

Varivance[data]

表附-8

Mathematica 命令	说　明
Frequencies[data]	计算 data 中数据出现的次数
CumulativeSums[data]	计算数据的累加和
BinCounts[data,{xmin,xmax,dx}]	以 min 与 max 为最小和最大界限，dx 为组距计算 data 中落于每一组的个数
Mean[data]	计算数据的平均值
Mode[data]	找出数据中出现最多的数，众数
Median[data]	数据的中位数
Variance[data]	样本方差
StandardDeviation[data]	样本的标准差
Covariance[data1,data2]	计算 Data1 与 data2 协方差
Correlation[data1,data2]	计算两组数据的线性相关系数
BarChart[data1,data2,...]	绘出 data1,data2,...长条图
Histogram[data]	绘制直方图
PDF[dist,x]	计算在 dist 分布中点 x 的概率密度函数
CDF[dist,x]	计算在 dist 分布中点 x 的分布函数
Random[dist]	产生一个服从 dist 分布的随机数
RandomArray[dist,n]	产生 n 个服从 dist 分布的随机数组成的集合
MeanCI[data]	计算 t 分布的总体平均数的置信区间
MeanCI[data,KnowVariance->var]	计算正态分布的总体平均数的置信区间，其中方差为 var。

附.8　Mathematica 在数值计算方法中的应用

附.8.1　插值

Interpolation 插值函数的一般形式：

Interpolation[data,InterpolationOrder->n]

对数据 data 进行插值运算，并可设置插值多项式的次数 n，默认值为 3。Interpolation 生成一个 InterpolationFunctio［插值范围,<>目标］，系统布线时所构造的插值函数。因此，用户直接用生成的插值函数计算函数的近似值。例如，

data=Table[{{1,16},{2,12},{4,8},{5,9}};

g=Interpolation[data,Interpolation->3]

g[1.2]

在数据中还可以包括插值点处的导数值，按{{x0,{y0,dy0}}，{x1，{x1,y1,dy1}},...}形式存

放数据。

例：已知插值条件 $f(0)=0, f(1)=2, f'(0)=1, f'(1)=1$，求三次插值多项式。

d={{0,0,1},{1,2,1}};h=Interpolation[d,x];h[0.2]

附.8.2 拟合

拟合函数 Fit 的一般形式：

Fit［数据，拟合函数的基，变量］

f={{1.36,14.09},{1.49,15.09},{1.73,16.84},{1.81,17.38},{1.95,18.44},{2.16,19.95}};Fit[f,{1,x},x]

Fit[f,{1,x,x^2},x]

Data=Table[{x,Log[x]},{x,1,10,1}];Fit[Data,{1,x,x^2},x]

附.8.3 最优化

Mathematica 中用来求极值的常用语句如表附-9。

表附-9

函 数	意 义
FindMininum[f,{x,x0}]	以初始点为 x=x0 计算的 f 一个局部极小值点
FindMininum[f,{x,{x0,x1}}]	以 x0,x1 为初始值计算 f 极小值，当找不出 f 的显示导数表示时使用
FindMininum[f,{x,{xs,x0,x1}}]	以 x=xs 为初始值，在区间[x0,x1]计算的极小值
FindMininum[f,{x,x0},{y,y0},...]	计算多变量函数 f 的极小值，初值为{x0,y0,...}

附.8.4 线性规划

在限定区域内求线性目标函数的极大或极小值的 Mathematica 命令为

ConstrainedMax[目标函数，{限定区域}，{变量}]

ConstrainedMin[目标函数，{限定区域}，{变量}]

计算 $\min f=c^T X$,s.t.$AX \geqslant b, X \geqslant 0$，其中 $c^T=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$， $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 Mathematica 命令为

LinearProgramming[c,A,b]

例如，计算函数 $f(x,y)=3x+2y-1$ 在限定区域 $x<1, y>2$ 上的最大值和最小值。

输入以下 Mathematica 语句：

ConstrainedMax[3 x+2 y-1,{x<1,y<2},{x,y}]

ConstrainedMin[3 x+2 y-1,{x<1,y<2},{x,y}]

附.9 Mathematica 的程序结构与设计

附.9.1 循环结构

While[条件,表达式] 当型循环结构。

在被求值时,其条件(一个逻辑表达式)先被求值；若求出值 True,则求值它的表达式部分,然后再重复上述过程,一旦对条件的求值得不到 True,整个循环结构的求值结束。注意,While 结构(作为一个表达式)求值的结果永远是 Null。

For[初始表达式，条件，步进表达式，表达式] For 循环结构。

被求值时，其初始表达式首先求值；然后进行循环，依次求值条件、表达式、步进表达式，一旦对条件的求值不能得到 True，立即结束整个结构，和 While 结构一样，For 结构最后得到的值总是 Null。For 结构允许没有表达式部分，可以使用如下形式：

For[初始，条件，步进表达式]。

For 循环的步进表达式一般用于对一些循环控制变量做步进赋值。系统中有一些专门为更新变量而提供的操作，主要的是：n++,++n,　n--,--n,这里 n 应当是一个整数值变量。

这些表达式使变量的值加(减)1；还可以用+=,-=,*=,/=运算符给(数值)变量加减乘除一个表达式的值。这些运算符的意义与 C 语言里同样形式的运算符类似。使用这些结构要注意：首先，两种循环都必须在条件表达式的求值得到 True 时才能继续，否则就结束。由于这里的数据对象是一般的表达式，对逻辑表达式的求值有时可能得不到逻辑值。第二，虽然在有些程序语言里可以把 0、1 等数值当逻辑值使用，在 Mathematica 系统里不能这样使用。第三，这两种结构的值总是 Null，因此不应该使用它们的值。

Mathematica 系统里还有一些特殊的循环结构，它们有：

Do[表达式，循环描述]　Do 按照循环描述重复求值表达式部分。

这种循环的特点是循环次数由循环描述直接确定。整个 Do 结构的求值结果总是 Null。FixedPoint[函数，表达式]从表达式出发，一次次地用函数作用，直到结果不再变化(达到一个不动点)为止。

附.9.2　分支结构

在复杂的计算中常需要根据表达式的情况(它是否满足一些条件)确定是否做某些处理，或在满足不同的条件时做不同的处理。前面关于规则定义的许多机制都可以处理这方面的问题，它们实际上也是足够的，只要把每一个要考虑条件的地方定义为一个专门的函数。但这样做有时显得太麻烦，定义的函数可能并没有客观的逻辑意义。Mathematica 提供了一些描述条件分支的结构，它们常用在程序里，用于控制程序的执行过程。

If 结构(1f 表达式)与一般程序设计语言的分支结构类似。由于系统的处理对象是表达式，这里的 If 结构有三种形式：

If[条件，表达式]

当条件的值是 True 时，对参数表达式求值，将它的值作为整个结构的值；当条件的值是 False 时，则给出值 Null。

If[条件，表达式 1，表达式 2]

当条件的值是 True 时，将表达式 1 的值作为整个结构的值；当条件的值是 False 时，将表达式 2 的值作为整个结构的值。

If[条件，表达式 1，表达式 2，表达式 3]

当条件的值是 True 时，求值表达式 1 作为结果；当条件的值是 False 时，以表达式 2 的值作为结果；当条件求不出 True 或 False 时，以表达式 3 的值作为结果。

对于前面两种情况，如果条件不能求出逻辑值，则整个 If 结构保留未求值的样子(以原来形式作为求值的结果)。

这里还有两种分支结构，它们是：

Which[条件 1，表达式 2，条件 2，表达式 2，…]

依次求值每一个条件；当遇到第一个求出值 True 的条件时，求值它对应的表达式，把这个表达式的值为作整个结构的值。若有一个条件不能求出逻辑值，则整个结构以未求值的形式作为结果，与 If 类似。如果所有条件都求出值 False，则结构的值是 Null。用 True 作为 Which 的最后一个条件，可以用于处理“其它”情况。

Switch[判别表达式，模式 1，表达式 1，模式 2，表达式 2，…]

求值判别表达式，将结果顺序与结构中的模式匹配：遇到第一个可匹配的模式时，以它对应的表达式的值作为整个结构的值。如果没有能匹配的模式，整个结构的结果是 Null。这两种分支结构的描述能力很强。Switch 用模式匹配的方法实现按表达式的结构分支处理，Which 以逻辑判断为依据,可以用来处理语义关系。

附.9.3 程序中的注释

Mathematica 的注释在形式上是由符号“(*”和“*)”括起的任何字符序列,序列中可以有任何字符,包括空格字符、换行符等。“(*”与“*)”括起的注释还允许嵌套。

附.9.4 基本输入、输出

1. 屏幕输出

系统的基本屏幕输出函数是 Print,它的使用形式是：

Print[表达式，表达式，…]

函数 Print 把作为它的参数的表达式依次用输出形式显示出来。两个相邻的表达式输出之间不留空格，整个输出完结后换一行。如果需要在表达式之间留空格,可以自己在它们之间加上包含空格的字符串。

2. 文件输出

要把一个变量的值或者一次计算的结果存入一个文件,用：

变量名>>“文件描述”

要把一些东西存进一个文件，放在已有的数据后面用

变量名>>>“文件描述”

这两个操作对应的实际形式是：

Put[表达式,表达式,…，文件描述]

它们把作为参数的表达式用输入形式依次写入指定文件,如果需要把表达式用其它形式输出到文件，必须特别说明。例如要把一个表达式用输出形式写入文件，应当写：

OutputForm[表达式]＞＞文件描述

OutputForm[表达式]＞＞＞文件描述

3. 交互式输入

需要从用户那里接受信息,可以用 Input 或 InPutString。

Input[]　当求值这个函数时，系统停止在当时状态，等待用户输入。当用户键盘输入一个完整的表达式后,Input 函数以这个表达式作为值返回。

Input[提示字符串] 作用同上，只是系统在等待输入时首先在屏幕显示提示字符串。

InputString，[]　与 Input 类似，只是它要求输入一个字符串，而不是一个一般的表达式。

InputString[提示字符串]等待输入时显示提示字符串。

4. 从文件读入数据

从文件读入数据的基本函数是 Read，其使用形式是：

Read [文件名，类型描述]

这个函数按照类型描述的说明从指定文件读入数据，并返回读入的数据。可以用 Read[文件名]的形式表示从指定文件读入一个表达式。从文件读入数据关键是正确地描述数据的类型。类型描述是一种特殊的表达式，它的基本元素是：

Byte	读入一个字节的数据，返回一个整数
Character	读入一个字节，返回一个字符
String	读入一个以换行符结尾的字符串
Real	读入一个近似数，近似数以一般的带小数点的形式给出，或以 C 语言或 Fortran 语言的形式给出
Reall	读入的数据总转换成一个近似数
Number	读入一个整数或一个近似数，如果读入的数不包含小数点，它们被转换成整数
Expression	读入一个表达式

另外，函数 OpenRead[文件名]、CloseRead[文件名]用于打开和关闭给输入函数使用的数据文件。